Universidade de Lisboa

A noção de declive nas funções afim, linear e constante

Inês Isabel Canário Teixeira

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2016

Universidade de Lisboa

A noção de declive nas funções afim, linear e constante

Inês Isabel Canário Teixeira

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2016

Resumo

Este relatório tem por base a intervenção letiva em uma turma do 8.º ano do ensino básico, com 30 alunos, da Escola Secundária de Caneças. Esta intervenção incidiu sobre a subunidade didática – Gráficos de Funções Afins e decorreu no início do 3.º Período do ano letivo 2015/2016, durante 18 tempos letivos.

Os dados foram recolhidos tendo como principal objetivo analisar as aprendizagens dos alunos no que diz respeito à noção de declive nas funções afim, linear e constante, bem como na compreensão que revelam desta noção nos diversos tipos de função, mas também no domínio nas diferentes representações de uma função. A unidade de ensino foi delineada segundo uma abordagem maioritariamente exploratória, tendo sempre como objetivo as aprendizagens dos alunos. Como tal, foram utilizadas fichas de trabalho e tarefas diversificadas ao longo de toda a lecionação da subunidade, privilegiando o trabalho autónomo a pares e os momentos de discussão e síntese de conteúdos. Algumas das tarefas foram trabalhados com o *software* GeoGebra.

Optei neste estudo por uma abordagem qualitativa, onde fui simultaneamente professora e investigadora. Os principais métodos de recolha de dados foram a observação, com registo áudio e vídeo, as produções escritas dos alunos e a entrevista a dois pares de alunos selecionados.

Com a análise de dados foi possível concluir que os alunos não revelam dificuldades na noção de declive na função linear, no entanto, essa noção revelou-se menos consolidada nas funções constantes. No momento em que foi introduzido a fórmula do cálculo analítico do declive a maioria dos alunos aplica-a corretamente, mas passou a usá-la, quase em exclusivo, para todo o tipo de funções. Desta forma, os alunos demonstram a sua preferência por uma ferramenta que lhes permite obter sempre os resultados que procuram, em detrimento de abordagens mais intuitivas da noção de declive. Os alunos quando confrontados com valores de declive distintos conseguem, na sua maioria, analisar a influência dos mesmos na inclinação das retas. Na função afim, os alunos revelaram mais dificuldades na sua representação tabular, bem como na conversão para a expressão algébrica.

Palavras-chave: Noção de declive, múltiplas representações, conversão, funções, dificuldades

Abstract

This report is based on the work with an 8th grader class with 30 students from the Secondary School of Caneças. This intervention focused on the teaching subunit – Graph of Affine Functions – and was held at the beginning of the 3rd period of the academic year of 2015/2016 during a period of 18 lessons.

Data were collected with the primary purpose of analyzing the level of knowledge that the students had regarding the notion of the slope in affine, linear and constant functions, but also the level of understanding revealed on the different representations of a function. The teaching subunit was developed with a mainly exploratory approach in mind and always focused on the student learning process. Consequently, worksheets and different tasks were specifically developed and used, favoring the students' autonomous work in pairs but also contributing to moments of discussion mainly for content synthesis. The students used GeoGebra software with some of the tasks.

In this study my option was for a qualitative approach, assuming simultaneously the role of a teacher and a researcher. Observation was the primarily data collection method used, mainly with audio and video recording, the students' written work and the interview of two pairs of selected students.

With the data analysis it was possible to conclude that the students showed no difficulty in the notion of slope in linear functions. However, this notion of slope proved less consolidated when it concerned constant functions. After the introduction of the formula for the analytical calculation of the slope most students start to apply it correctly, but also started to used it almost exclusively for all types of functions. Thus, students seemed to demonstrate their preference for a tool that allows them to always get the results they seek over a more intuitive approach of the notion of the slope. When students were challenged with different slope values they demonstrate they were able to analyze the respective influence on the slope. On the affine function, students showed more difficulties in tabular representation as well as in the conversion to algebraic expression.

Key words: slope notion, multiple representations, conversion, functions, difficulties

Agradecimentos

Quero, em primeiro lugar, agradecer à minha avó que sempre me apoiou e que, infelizmente, não me pode acompanhar neste momento. Lembro-me, com saudade, da primeira pergunta que me fazia sempre que nos encontrávamos – "…como vai a escola?" Recordo com muito carinho a confiança e motivação que me transmitia quando, com muito orgulho, dizia sempre que eu ia ser professora. Para ti, avó, por todos os nossos momentos e com muita saudade!

À Professora Dra. Hélia, que sem ela, não seria possível este trabalho. Por todo o apoio, todos os dias e a todas as horas, por todas as palavras de motivação. E pela sua maneira, mesmo quando as coisas não estavam bem, conseguir dizer tudo de uma forma tão simpática, confortante e motivadora, que não nos deixa vacilar. Muito obrigada por me acompanhar de forma tão presente neste meu caminho!

À Professora Dra. Suzana Nápoles, por todos os seus conselhos, pela sua disponibilidade, apoio e ensinamentos.

Um muito obrigado, com um carinho muito especial, à Professora Anabela Candeias! O seu apoio incondicional, as horas longas de conversas dentro e fora da escola, foram marcantes no meu percurso. Senti-me sempre acompanhada e aprendi muito do que sei sobre estar numa sala de aula com ela. Foi um verdadeiro exemplo que transportarei para sempre.

À Direção da Escola Secundária de Caneças pela sua simpatia e por me fazer sentir sempre que pertencia à Escola! Muito obrigada a todos os professores pela sua simpatia, em particular ao Professor Paulo Falardo pelo seu apoio, ajuda e pela sua paciência em ajudar-me.

À "minha" turma por TUDO! Nunca me vou esquecer de nenhum de vocês, fizeram parte deste percurso e foram sempre adoráveis! Já estou cheia de saudades de puder estar com vocês e não me vou esquecer de todas as palavras de carinho e pela vossa preocupação com este relatório. Têm o futuro pela frente!

A todos os professores do Mestrado, muito obrigada por todos os ensinamentos e conselhos. Sem dúvida, que marcaram o meu percurso.

À minha família que sempre me apoiou e me desculpou pelas longas ausências durante este percurso. Muito obrigada à minha mãe pelo seu apoio e ao meu avô que é um exemplo a seguir. Sem ele não seria possível ser quem sou! Ao meu irmão, aos meus tios, às minhas primas – Joana e Beatriz e sem dúvida ao mais novo elemento da família, a minha sobrinha Benedita!

Ao João Paulo, por todo o apoio, por todas as horas a ajudar-me e pelas suas palavras sábias. Por não me deixar desistir e nunca sair do meu lado, principalmente nos meus momentos de maior desespero!

Aos meus amigos, que sempre se mantiveram ao meu lado e que não desistiram de mim, mesmo quando eu desaparecia durante meses e não os podia acompanhar. Principalmente, à Vanessa e à Margarida, que estão comigo desde sempre e sempre me apoiaram em todas as loucuras! Olhem os ursos polares!!!

A todos os meus amigos da licenciatura que me permitiram chegar aqui. Muito obrigada a todos, mas principalmente ao Filipe, xinho da noite!!! À Nádia pelas suas palavras, à Marlene por tudo o que passamos juntas, à Sara pelas jantaradas com a Nicole e todas as nossas loucuras!

A todos os meus colegas do mestrado, obrigada pelo companheirismo! Obrigada Hugo pelas nossas conversas, pelas chamadas e por tudo, obrigada Cristiana e Manuel pelas conversas sem jeito!

Um especial agradecimento à Nicole, a minha companheira neste caminho. Desde Topologia e agora…estamos aqui! Este caminho, não poderia ter sido feito sem ti, as mil chamadas por dia e as cem mil mensagens trocadas! Todo o nosso desespero partilhado, foste sem dúvida uma ajuda crucial e um apoio incondicional. Ouviste-me sempre, os meus desabafos, os meus desesperos, ajudaste-me sempre que precisei. MUITO OBRIGADA!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1
Introdução

O presente relatório diz respeito à prática supervisionada que elaborei no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional IV e tem por base a intervenção letiva numa turma do 8.º ano de escolaridade, com 30 alunos, da Escola Secundária de Caneças. Esta intervenção incidiu sobre a subunidade didática – Gráficos de Funções Afins e decorreu no início do 3.º Período do ano letivo 2015/2016. Neste contexto realizei um estudo de cariz investigativo sobre a noção de declive nas funções afim, linear e constante dos alunos desta turma que é também apresentado neste relatório.

1.1. Motivações

Toda a minha infância foi marcada pela Matemática e pelo Ensino. Sempre que me perguntavam o que eu queria ser quando fosse grande, a resposta era fácil, imediata e consistente – professora de Matemática! Sem dúvida que esta resposta, bem como a decisão tomada, ainda que sem perfeita consciência do seu significado verdadeiro, deveu-se à influência da minha mãe. As férias escolares, passadas nos corredores das escolas vazias, as conversas ao jantar sobre os seus alunos e as suas múltiplas formações, sempre me deixaram um brilho nos olhos e uma vontade de seguir o mesmo caminho profissional.

Quando ingressei na faculdade, não haviam muitas dúvidas, nem grandes decisões a tomar pois era claro para mim que iria frequentar a licenciatura em Matemática, complementando-a, posteriormente, com o mestrado em Ensino da Matemática. Apesar de nem tudo ter decorrido como sonhei, nem como pensei que seria a realidade do dia a dia, é agora um momento verdadeiramente especial poder estar a escrever esta reflexão nesta etapa tão importante da minha vida. Sem dúvida que estou perante a concretização de um sonho antigo.

Enquanto frequentava a licenciatura de Matemática tive a oportunidade de iniciar o meu percurso profissional, tendo começado a trabalhar na área da educação e, desde aí, tenho-me mantido nesse percurso o que tem aumentado esta minha paixão antiga pela Matemática e pela educação em geral.

Decorrente desta minha primeira experiência no sector da educação, nos últimos anos – e já lá vão 7 anos! – quando trabalho com os alunos, o meu principal objetivo tem sido sempre compreender as suas reais dificuldades para os tentar ajudar a ultrapassá-las. Procurando sempre, desta forma, perceber o que estão a pensar, nomeadamente no que diz respeito, principalmente aos seus processos de raciocínio, dando-lhes as ferramentas que lhes proporcionem uma maior facilidade na compreensão dos conteúdos. Na verdade, tudo o que está relacionado com a educação fascina-me pelo que tenho aproveitado todas as oportunidades para aprender mais, o que tem contribuído para melhorar a minha formação pessoal e profissional.

O meu gosto pela educação está em consonância com o meu gosto pela Matemática e, muito particularmente, em tudo o que esteja relacionado, ou permita relacionar, os processos de raciocínio com os próprios conceitos.

Uma das temáticas que mais gosto dentro da Matemática diz respeito à Álgebra e às Funções, decorrendo daí esta minha escolha do tema do meu estudo. Esta preferência está ligada às conexões existentes entre a Álgebra e o tema Números e Operações. Como está presente no NCTM (2007, p.39) a "Álgebra é um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade", portanto os professores podem ajudar os alunos a construir uma base sólida como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado.

Na Álgebra, o tema das Funções, foi sempre aquele que me suscitou particular interesse, por diferentes razões, sendo a principal a sua transversalidade ao longo de diversos anos escolares, em particular a partir do 7.º ano de escolaridade, onde o tema se inicia em termos escolares, continuando até ao 12.º ano de escolaridade.

Na subunidade onde incidiu o presente estudo, é muito importante os alunos desenvolverem a noção de declive nos diversos tipos de funções estudadas e nas múltiplas representações de uma função, como é corroborado pelo NCTM, "os alunos deverão desenvolver uma compreensão alargada e aprender a manusear os conceitos de declive e ordenada na origem, bem como reconhecê-los em tabelas, gráficos e equações" (2007, p. 264).

1.2. Objetivo e Questões do estudo

O trabalho de cariz investigativo que realizei tem como objetivo analisar as aprendizagens dos alunos do 8.º ano no que diz respeito à sua consolidação da noção de declive nas funções afim, linear e constante. Para tal, realizei um trabalho baseado na exploração de tarefas e onde foram analisadas, e interpretadas, as resoluções dos próprios alunos com o objetivo de responder às seguintes questões:

- Que compreensão revelam os alunos da noção de declive nos vários tipos de função?
- Como se evidencia essa compreensão nas várias representações de uma função? E na conversão entre representações?

Para tal lecionei a subunidade didática – Gráficos de Funções Afins – onde desenvolvi um trabalho, com os alunos, de caráter maioritariamente exploratório. A Unidade de Ensino decorreu numa turma do 8.º ano com 30 alunos, durante 18 tempos, no início do 3.º período.

1.3. Organização do Relatório

Este relatório é composto por cinco capítulos, tendo por base a Unidade de Ensino lecionada e as questões do estudo.

O segundo capítulo diz respeito ao enquadramento curricular e didático, incluindo uma revisão de literatura referente ao ensino das funções recorrendo à utilização de tarefas com situações contextualizadas e à tecnologia dentro da sala de aula. Inclui ainda a importância do conceito de função, das múltiplas representações e, da noção de declive.

O terceiro capítulo é sobre a Unidade de Ensino. Começo por apresentar um pouco do contexto escolar onde decorreu o estudo e a ancoragem da unidade. Descrevo as estratégias de ensino utilizadas ao longo da subunidade, as tarefas utilizadas, onde descrevo os principais objetivos com que foram elaboradas e os conceitos matemáticos que pretendia rever ou introduzir com essas tarefas. Finalizo este capítulo com uma reflexão sobre cada uma das aulas lecionadas, onde destaco os momentos principais da aula, nomeadamente no que diz respeito às aprendizagens e dificuldades sentidas pelos alunos, as dificuldades por mim sentidas durante a lecionação, bem como alguns aspetos que poderia melhorar na minha prática letiva.

No quarto capítulo refiro os métodos e procedimentos de recolha de dados, destacando as opções metodológicas que tomei durante o estudo, os participantes envolvidos, particularizando os dois pares selecionados e os métodos de recolha de dados utilizados.

No quinto capítulo apresento a análise de dados tendo por base seis questões estratégicas. Menciono a análise de cada uma das questões, destacando primeiro os dois pares selecionados e, em seguida, a restante turma.

O último capítulo contempla a conclusão do estudo em questão, onde apresento as suas principais conclusões, terminando com uma reflexão final relativa à elaboração deste relatório e do meu percurso durante o mestrado.

Capítulo 2
Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo, começo por apresentar uma sintética evolução do conceito de função ao longo de vários séculos até aos dias de hoje, salientando os factos e datas mais relevantes. Tendo em conta o programa de Matemática em vigor e outros documentos curriculares, apresento os principais momentos onde os alunos trabalham as funções até ao 8.º ano de escolaridade, enfatizando também outras temáticas que têm influência na aprendizagem das funções. Analisarei, ainda, o ensino das funções recorrendo à utilização de tarefas com situações contextualizadas e à tecnologia dentro da sala de aula, finalizando este capítulo com a importância do conceito de função, das múltiplas representações e da noção de declive. Transversalmente, ao longo deste capítulo, analisarei as principais dificuldades dos alunos nesta temática, dando maior ênfase às dificuldades nas múltiplas representações e na noção de declive.

2.1. Conceito de função: breve evolução histórica

O conceito de função foi sendo construído ao longo de vários séculos, tendo sido aplicado ao estudo dos movimentos nos finais do século XVI, princípios do século XVII (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1997). Segundo estes autores o desenvolvimento do conceito de função foi consequência do progresso do cálculo, onde se tornou necessário dar um conceito preciso de função

Em simultâneo, com a teoria das equações algébricas, desenvolve-se o conceito de função como uma correspondência entre os valores de duas variáveis (Ponte, Branco & Matos, 2009). Segundo estes autores as primeiras funções que surgiram foram as algébricas – as funções polinomiais e as funções racionais. Rapidamente surgiram funções mais complexas – as funções transcendentes – onde se incluem operações como a radiciação e exponenciação, logaritmos e razões trigonométricas

Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte forma: “chamamos aqui função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constantes” (Silva & Rezende, 1996, p. 30).

No século XVIII, o conceito de função foi fundamentado por Euler que introduziu a simbologia $f(x)$ para o valor de função e substitui o termo “quantidade” por expressão analítica na definição de função apresentada no seu livro *Introductio in Analysin Infinitorum*. A noção de função ficou assim interligada com a terminologia de expressão algébrica e vigorou desta forma pelos séculos XVIII e XIX (Teixeira et al., 1997).

O conceito de função que vigora atualmente data do século XIX e expressa claramente a evolução histórica e o desenvolvimento do pensamento matemático ao longo dos séculos. A sua atual definição é similar à apresentada por Dirichlet em 1837:

> Uma função $f: A \rightarrow B$ consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma regra que associa a cada elemento *x* de A (objeto) um só elemento *y* de B (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em A com valores em B. Chama-se contradomínio de *f* ao subconjunto de B formado pelas imagens. Quando o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada, a função diz-se sobrejetiva (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1997).

Atualmente o conceito de função continua a ser estudado por vários matemáticos, devido à sua importância na área da álgebra, mas também devido às suas implicações noutras áreas. Schwindgendorf, Hawks e Beineke (1992) defendem que as “raízes do conhecimento das funções não consiste apenas num único caminho hierárquico” e que este conceito “é simultaneamente uma fundação explícita e implícita do estudo avançado da matemática e como uma ferramenta” (citado em Ayalon, Watson & Lerman, 2015, p.322).

2.2. Orientações Curriculares para o ensino das Funções

O conceito de função, ao longo dos tempos, tem vindo a ter um papel mais importante, apesar de as expressões apresentadas aos alunos terem vindo a ser simplificadas. Mesmo assim, diversos autores defendem que o papel das funções deveria ser, ainda, mais destacado do que é habitualmente nos currículos (Ponte, Branco & Matos, 2009).

O estudo das funções está presente ao longo de vários ciclos de escolaridade, iniciando-se no segundo ciclo de escolaridade apesar de só se aprofundar a partir do primeiro ano do terceiro ciclo até ao ensino secundário. Continua a ser um tema de extrema importância no domínio da Matemática, como está presente na Brochura de

Álgebra (Ponte, Branco & Matos, 2009), distinguem-se três temas na Álgebra Clássica sendo um deles o trabalho elementar com as funções, estando destacadas as funções lineares, afins, proporcionalidade inversa, quadrática e funções irracionais. Mas também é evidente, a estreita relação entre a noção de função e a de equação.

No segundo ciclo do ensino básico, os alunos começam a aprofundar e a realizar aprendizagens que são os alicerces para o estudo das funções, como é o caso, no 5.º ano de escolaridade, onde os alunos trabalham com os referenciais cartesianos, mas também com a terminologia abcissa, ordenada e coordenadas.

No 6.º ano de escolaridade é realizada a continuação do estudo das sequências e regularidades, aprofundando-o, mas também sendo introduzida a "determinação de expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente" (MEC, 2013, p.18), sendo este um dos primeiros momentos onde os alunos são confrontados com a utilização de uma variável. Ainda neste ano de escolaridade é iniciado o estudo da proporcionalidade direta que é fundamental para o estudo das funções de proporcionalidade direta iniciado no 7.º ano de escolaridade.

Ao iniciar o mais cedo possível o estudo da correspondência entre duas incógnitas, conseguimos incutir nos alunos o significado de relação, considerando assim esta abordagem "uma contribuição plausível para a compreensão que as relações entre dois conjuntos de números podem ser expressas por "regras" gerais algébricas" (Ayalon, Watson & Lerman, 2015, p.323). Desta forma, é crucial que os alunos comecem este trabalho no segundo ciclo do ensino básico e ao trabalharem ao longo de vários anos a temática, é uma garantia que a aprendizagem é feita gradualmente e que essas noções vão sendo trabalhadas e aprofundadas, ajudando-os a "construir uma base sólida baseada na compreensão e nas suas experiências como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado no 3.º ciclo e no secundário" (NCTM, 2007, p.39).

No terceiro ciclo do ensino básico é introduzido o domínio Funções, Sequências e Sucessões, onde "é feita uma introdução ao conceito de função e de sucessão e de algumas operações entre elas. São consideradas funções de proporcionalidade direta, inversa, funções afins e quadráticas" (MEC, 2013, p.19).

No 7.º ano de escolaridade os alunos iniciam explicitamente o estudo das funções pela sua definição, bem como com as operações com funções numéricas e as sequências e sucessões como funções. De acordo com o programa e metas curriculares do ensino básico da Matemática, os alunos aprendem diversas notações e terminologias, tais como "objeto", "imagem", "domínio", "contradomínio", "conjunto de chegada", "variável" e "função numérica". São introduzidas as funções constantes, lineares, afins e de proporcionalidade direta, apesar de, neste ano de escolaridade, os alunos não trabalharem aprofundadamente a função afim, mas apenas "identificam a função afim como a soma de uma função linear com uma constante" (MEC, 2013, p.54).

No 8.º ano de escolaridade, nível em que incide este estudo, são introduzidos os gráficos de funções afins. Neste ano, a grande incidência é sobre os gráficos e as respetivas expressões algébricas, apesar de os alunos trabalharem com todas as representações de uma função.

2.3. O ensino das funções

Nesta secção irei salientar as vantagens do uso de tarefas, em particular de tarefas com situações contextualizadas e o recurso à tecnologia, para o ensino das funções.

2.3.1. Tarefas para o ensino das funções

Existem diversos modelos de tarefas, e não existe um que seja sempre o mais adequado, na medida em que a escolha desse modelo depende de diversos fatores. Deve-se ter em consideração as características da turma, mas também o objetivo que temos com a implementação da tarefa, "a gestão curricular tem a ver, com o modo como o professor interpreta e (re)constrói o currículo, tendo em conta as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho" (Ponte, 2005, p.11).

As tarefas têm um papel importante na sala de aula, como defende Stein e Smith, o efeito cumulativo de exploração, de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática (1998, p.2).

Vários autores defendem a utilização de tarefas contextualizadas para o ensino das funções, como está presente em Ponte, Branco e Matos (2009, p.122), "o trabalho com funções afins lineares e não lineares deve desenvolver-se sobretudo em situações contextualizadas".

O processo de modelação pode ser determinado por quatro fases: modelo – organização do problema; análise – resolução do problema; interpretação – interpretação da solução em termos da realidade; e validação – comparação da solução com a realidade (Teixeira et al., 1997).

A fase da interpretação é uma das fases onde os alunos manifestam mais dificuldades, mas também uma das fases mais importantes na modelação. Nas funções esta fase está diretamente relacionada com o domínio das mesmas, a solução pode ser válida, mas não no contexto da situação, e assim os alunos também apuram o seu sentido crítico. Portanto, na última fase, os alunos devem concluir o problema com base em todos os fatores, dando uma resposta válida nesse mesmo contexto.

A importância do uso de tarefas contextualizadas no ensino das funções também é evidenciado no NCTM (2007, p.268), "os alunos deverão ter experiências frequentes com a modelação de problemas com equações da forma $y = kx$ (…), também necessitam de oportunidades para modelar relações do dia a dia". Em suma, a utilização de tarefas contextualizadas é fundamental para servir de base à própria aprendizagem da Matemática (Ponte & Quaresma, 2012).

2.3.2. Recurso à tecnologia

Diversos autores defendem o uso da tecnologia nas salas de aulas para promover a aprendizagem dos alunos, como também está presente no NCTM (2007, p.26), "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos". Por exemplo, ao utilizar um *software* no domínio da álgebra, como o GeoGebra, os alunos conseguem não só visualizar facilmente as representações gráficas de diferentes funções, mas também conseguem, em simultâneo, obter as diferentes representações de uma mesma função. Assim, é importante dar oportunidade aos alunos "de aprender a interpretar as representações tecnológicas e a usar a tecnologia, de forma eficaz e criteriosa" (NCTM, 2007, p.39).

Os alunos revelam, habitualmente, bastantes dificuldades nas múltiplas representações das funções bem como na conversão entre as mesmas, pelo que a utilização de tecnologia facilita uma melhor perceção das representações gráficas. Desta forma, recomenda-se que sejam proporcionadas aos alunos uma variedade de experiências no estudo das funções, "integrando a resolução de problemas e pequenas investigações que podem passar, por exemplo, pela incorporação de materiais manipulativos, pelo envolvimento dos alunos na recolha de dados e pelo recurso à tecnologia gráfica" (APM, 2002, p.10).

Especificamente no estudo das funções, deve-se recorrer à tecnologia, como é o caso do GeoGebra, para os alunos puderem visualizar as representações gráficas das funções, serem confrontados com determinadas características que de outro modo poderia ser difícil de conseguir. Desta forma, é corroborado pelo NCTM (2007, p.27) que "o poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente".

A tecnologia, desde que utilizada corretamente e tendo sido feito um planeamento detalhado para as aulas, pode ser efetivamente uma mais valia: "os alunos do 3.º ciclo poderão estudar as relações lineares e as noções de declive e de alteração uniforme, recorrendo às representações realizadas pelo computador" (NCTM, 2007, p.28).

2.4. A aprendizagem das funções

As aprendizagens dos alunos decorrem de diversos fatores, externos e internos, neste sentido o professor tem de os ter em consideração para desta forma maximizar as aprendizagens dos mesmos. Alguns fatores dependem diretamente do professor, nomeadamente como as aulas são dirigidas e os trabalhos planeados, outras decorrem da própria natureza dos conceitos matemáticos em jogo.

2.4.1. O conceito de função

O conceito de função tem um grande destaque também devido às dificuldades inerentes ao mesmo, como argumentam Nachlieli e Tabach (2012, p.11) "no caso do objeto chamado *função*, as dificuldades podem ser mais agudas do que qualquer outro conceito das ciências naturais e também para a maioria dos objetos matemáticos que preenchem os currículos escolares".

Como em muitas outras temáticas, os alunos devem adquirir a perceção antes de conseguirem ter domínio sobre as mesmas, só desta forma conseguem fazer as corretas ligações, "neste sentido, os números negativos, as funções e os conjuntos são idênticos às plantas, animais e estrelas, ou até às forças e velocidade – como todos esses fenómenos naturais que as crianças conhecem antes de terem a linguagem para lidarem com eles"

(Nachlieli & Tabach, 2012, p.10), isto é os alunos devem ter uma perceção do que são as funções antes de saberem trabalhar com as mesmas.

Ronda sustenta este mesmo facto, "os alunos compreendem primeiro o conceito matemático como um procedimento ou como um processo antes de o compreenderem como um objeto que tem propriedades que podem ser manipuladas ou transformadas" (2015, p.15). Desta forma é expectável que, inicialmente, os alunos comecem a trabalhar com as funções como um procedimento, aplicando o que lhes foi ensinado, mas devem ter a noção para que servem as funções, que tipo de funções existem e o que as diferencia. Só assim conseguem realizar aprendizagens com significado, e não apenas memorizando processos para obter resultados.

Candeias (2010), que realizou um estudo, no nosso país, numa turma do 8.º ano de escolaridade recorrendo ao *software* GeoGebra, conclui que os alunos antes de iniciarem a lecionação da Unidade de Ensino referente ao estudo das funções, já conseguem identificar situações de proporcionalidade direta, mas conclui no final do estudo que os alunos apresentam dificuldades na apreensão e aplicação do conceito de função.

2.4.2. Múltiplas representações

Os alunos começam a trabalhar as funções, como já referi, mais explicitamente e aprofundadamente no 7.º ano de escolaridade, com o estudo das funções afim, linear e contante, bem como a função de proporcionalidade direta. A partir deste momento, os alunos trabalham com diferentes representações de uma função tornando este primeiro contacto com as múltiplas representações um momento muito importante, pelo que foi um foco do estudo que me propus realizar.

Na verdade, deve-se explorar mais que, exclusivamente, as conversões entre representações, os alunos devem estar conscientes que existem representações que são mais convenientes dependendo do que pretendemos trabalhar e que em cada representação existem características e propriedades que são mais fáceis de compreender do que noutra, como defende Ronda (2015, p.3), "as ligações entre representações é mais do que a conversão entre representações. É sobre ser capaz de ver as características e as propriedades das funções em todas as suas diferentes representações".

Uma das questões do estudo à qual procuro dar resposta é como se evidencia a compreensão da noção de declive nas várias representações de uma função –

representação tabular, representação gráfica e expressão algébrica – é fulcral que os alunos “adquiram à vontade para relacionar expressões algébricas que contenham variáveis com representações verbais, gráficas e em tabelas de relações numéricas e quantitativas” (NCTM, 2007, p.263). Naturalmente, os alunos devem saber interpretar todas as formas de representação, mas estes necessitam também de orientações que os apoiem a estabelecer “conexões entre as características matemáticas das relações das funções que são representadas e o método pelo qual a sua representação é feita” (Brendefur, Hughes & Ely, 2011, p.19), para que, desta forma, ao serem confrontados com uma determinada representação consigam saber que tipo de função se trata e também consigam retirar todos os dados que necessitem ou possam convertê-la para outra representação que seja mais favorável.

O NCTM também defende que, “no ensino básico, os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e as desvantagens de cada forma de representação, consoante os objetivos em causa” (2007, p.40), pois estes devem compreender que dependendo do que pretendem estudar e analisar existem representações mais adequadas. Esta facilidade na escolha de representações é uma mais valia em diversas áreas. Sendo que, para explorar as diversas representações existentes, o tema das funções é um dos mais indicados, pois “é especialmente adequado a concretizar as atuais orientações internacionais e nacionais de proporcionar aos alunos o contacto com a diversidade de representações matemáticas” (Gafanhoto & Canavarro, 2008, p.3).

Durante todo o estudo procurei fomentar uma cultura de sala de aula aberta à discussão de resultados, mas também dar “aos alunos oportunidades, de não efetuarem apenas conversões entre diferentes representações, mas também terem as suas dificuldades diagnosticadas e resolvidas” (Bossé, Adu-Gyamfi, & Cheetham, 2011, p.117), isto é, os alunos foram sempre questionados sobre os processos utilizados e ajudados na elaboração de estratégias para conseguirem superar as suas dificuldades.

Na conversão entre representações, são necessárias diferentes interpretações dependendo da conversão que irá ser efetuada, o que pode influenciar o grau de dificuldade da mesma. Vários autores referem diferentes erros na conversão entre representações, tais como Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011) que mencionam: erros de manipulação – os alunos calculam incorretamente problemas aritméticos ou algébricos ou utilizam nomes para as variáveis incorretos; erros conceptuais, que podem ser de dois tipos – os alunos introduzem incorretamente ou omitem uma importante restrição. Mas também aludem que as conversões que envolvem representações verbais estão entre as mais difíceis.

Nesta área também já existem diversos estudos nacionais, como é o caso de Almeida e Oliveira (2009) que realizaram uma investigação sobre a aprendizagem de funções no 11.º ano recorrendo à calculadora gráfica. Neste estudo defendem que é utilizando múltiplas representações que os alunos conseguem dar significado a um objeto matemático e que a sua aprendizagem só é eficaz quando estes conseguem articular diversos registos de representação. Ainda neste estudo é referido que ao desenvolver tarefas com diversas representações de uma função e enfatizar a conversão entre as mesmas permite evitar o fenómeno da compartimentalização, que é um dos grandes obstáculos à compreensão das funções.

Outro estudo realizado por Bárrios (2011) foi elaborado recorrendo à utilização do *software* Graph, foi identificado que na determinação de objetos e imagens, se a informação for apresentada na forma tabular os alunos tentam aplicar uma relação de proporcionalidade, para converter noutra representação, mesmo quando a mesma não se aplica naquele caso. Em geral, os alunos revelaram grandes dificuldades na conversão para a respetiva expressão algébrica, sendo que onde revelam menos dificuldades é na conversão para uma expressão algébrica de uma função linear (do tipo $y = kx$).

Ainda neste estudo, alguns alunos necessitam de converter para uma representação intermédia, antes de conseguirem converter para a representação que pretendiam. Normalmente, quando se deparam com esta dificuldade, convertem para a representação gráfica e desta para a que desejavam obter. Outra estratégia que adotaram para a conversão de uma representação para a expressão algébrica, é a análise dos dados que dispunham e identificarem o tipo de função, sendo assim apenas tinham de descobrir os parâmetros que faltavam. Os alunos que ainda manifestaram dificuldades eram exatamente os que não conseguiam fazer esta análise do tipo de função.

Consciência (2013) também defende que a conversão entre representações é uma tarefa difícil para os alunos, mesmo os do ensino secundário, principalmente no caso da conversão da representação gráfica para a respetiva expressão algébrica. À semelhança do estudo anterior, os alunos também têm necessidade de recorrer a uma conversão intermédia, revelando que existem conversões com diferentes graus de dificuldade.

Noutro estudo nacional, também com alunos do 8.º ano, na conversão para a representação gráfica, Loureiro (2013) refere que algumas das dificuldades é a "tendência dos alunos para considerarem apenas valores positivos para as variáveis" (p.123) e ainda que "no referencial cartesiano não prolongaram os semieixos negativos e limitarem o gráfico da função ao primeiro quadrante" (p.123).

No estudo elaborado por Gafanhoto e Canavarro (2008) a alunos do 9º ano de escolaridade, recorrendo à utilização do GeoGebra concluíram que as conversões entre representações mais frequentes foram entre a representação tabular e a algébrica e entre a gráfica e a tabular. Sendo que nesta última conversão os alunos recorrem a uma funcionalidade do GeoGebra. Ainda neste estudo, as autoras referem que nas questões de exploração, os alunos recorrem maioritariamente à utilização da representação gráfica, mas que os alunos utilizam todas as outras representações em diversas situações.

2.4.3. Noção de Declive

O reconhecimento da importância do estudo da noção de declive ao trabalhar com funções e retas com os alunos está presente em vários artigos, de diferentes autores pois "a compreensão da variação é essencial à compreensão das funções" (NCTM, 2007, p.42). Se os alunos compreenderem a relação entre o valor do declive (positivo, negativo ou nulo) e a respetiva inclinação de uma reta, mas principalmente o conceito de linearidade, o estudo das funções passa a ser mais acessível, mas também a respetiva conversão entre as múltiplas representações, dando-lhes ferramentas para o estudo posterior dos outros tipos de funções, como defende o NCTM:

> com uma forte incidência curricular sobre o conceito de linearidade no ensino básico, os alunos poderão aprender que o declive representa a taxa constante de variação das funções lineares e ficarão preparados para a aprendizagem dos diversos tipos de funções que não possuem taxas de variação constantes ao longo do ensino secundário (2007, p.43).

Devemos, portanto, incutir nos alunos o conceito de linearidade, isto é, explicitar e reforçar a ideia que os gráficos de funções afim e linear têm um crescimento constante, dando-lhes um acervo de conhecimentos cruciais para o estudo de diversas funções, como é o caso das funções que não possuem uma taxa constante de crescimento.

Ao reforçar o estudo da noção de declive também se proporciona aos alunos uma melhor compreensão do conceito de covariação e, consequentemente de função, pois "a abordagem da covariação nas funções envolve a compreensão da maneira como as variáveis dependentes e independentes se alteram” (Ayalon, Watson, & Lerman, 2015, p.323). Sendo que, segundo estes autores, o conceito de covariação é “a compreensão que as mudanças em duas ou mais variáveis podem ser relacionadas uma com a outra, em fenómenos naturais, ou em situações matemáticas” (p. 323), isto é, quando ocorrem mudanças nos objetos ou nas imagens de uma função, essas alterações estão correlacionadas enquanto, segundo os mesmos autores, a taxa de variação é “o instante no qual uma relação que muda numa variável pode ser expressa formalmente ou numericamente em termos de mudança na outra variável” (p. 323). Sendo que a distinção entre o conceito de covariação e a taxa de variação, é que no primeiro as mudanças estão relacionadas com as duas variáveis, enquanto que no segundo, podemos expressar uma variável em função da outra.

Diversos estudos analisam que abordagens podem ser mais bem sucedidas no ensino das funções, sendo as duas mais mencionadas a abordagem da covariação e a convencional abordagem da correspondência. A abordagem da covariação está interligada com as noções de taxa e a proporção. Esta comparação, entre a abordagem da covariação e a abordagem da correspondência foi apresentada por Herbert (2008, p.29), os “passos iniciais para uma visão da covariação de uma função são dados quando a taxa e a proporção são apresentadas aos alunos”. Isto porque, segundo o autor, existe uma forte interligação entre as noções de proporção e de taxa constante e, assim, esta pode constituir a primeira experiência para os alunos de trabalharem a covariação explicitamente.

O estudo realizado por Herbert baseia-se na abordagem da covariação, enfatizando a noção de taxa, defendendo que “conexões explícitas entre tabelas e gráficos são necessárias para capacitar os alunos de transferir os conhecimentos de taxa de uma representação para outra” (2008, p.34), dado que para que os alunos desenvolvam a capacidade de se mover sem problemas entre representações precisam de ganhar experiência com cada representação. Este estudo, que recorreu a um *software* de geometria dinâmica, concluiu que a utilização deste recurso foi um estímulo positivo para a discussão sobre a noção de taxa e ajudou os participantes a desenvolver esta noção, mas que se deve ter particular atenção à utilização de tarefas contextualizadas reais para evitar o excesso de exigência cognitiva. Portanto, este autor defende que lecionar e realizar aprendizagens das funções necessita de incluir explicitamente conexões entre as múltiplas representações de uma função com enfase na noção de taxa.

Outro estudo realizado por Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, Williams e Amidon (2013), também apresenta a abordagem da covariação como alternativa à abordagem da correspondência, onde definem a mesma como sendo "nesta abordagem examina-se a função em termos de mudanças de coordenadas de valores de x e de y, onde se move operacionalmente a partir de y_m para y_{m+1} que é coordenado com o movimento a partir de x_m para x_{m+1}" (p.120). Este estudo, comparou o trabalho desenvolvido por duas alunas, em que uma utilizou num problema a abordagem da covariação e a outra a abordagem da correspondência. Concluíram que quando era necessário mudar para a outra abordagem, a aluna que utilizou a abordagem da covariação conseguia mais facilmente mudar para abordagem da correspondência do que a aluna que estudou a abordagem da correspondência. Aliás, a compreensão das regras da correspondência foi refletida pelo seu foco na covariação.

Um estudo nacional realizado por Canário (2011) numa turma do 8.º ano utilizando *software* GeoGebra, refere que os alunos conseguem entender a influência do valor do declive na função de proporcionalidade direta (parâmetro k) num contexto real, mas também na inclinação de uma reta. E reconhecem que este tipo de funções representa funções de proporcionalidade direta, pois a reta passa na origem do referencial. Ainda neste estudo é referido a grande relutância dos alunos em justificar as suas respostas, identificando que essa relutância é consequência das suas dificuldades.

Ainda noutro estudo nacional referido anteriormente, Candeias (2010) também refere que os alunos conseguem identificar corretamente gráficos que representam funções lineares e à semelhança do estudo anterior reconhecem que a reta passa na origem do referencial.

Pretendo assim, com este estudo analisar as aprendizagens dos alunos no que diz respeito à noção de declive nas funções afim, linear e constante, com o objetivo de perceber quais as suas dificuldades nesta temática e como os podemos ajudar a ultrapassá-las. Simultaneamente, ao incidir o trabalho desenvolvido com os alunos na noção de declive, durante a subunidade gráficos de funções afim, pretendo que estes realizem aprendizagens com significado.

Capítulo 3
A Unidade de Ensino

O estudo realizado baseou-se na lecionação da subunidade Gráficos de Funções Afins, numa turma do 8.º ano de escolaridade na Escola Secundária de Caneças. Esta intervenção decorreu durante o período de 4 de abril a 28 de abril, com a aplicação anterior de uma ficha diagnóstico, no dia 26 de março.

Neste capítulo apresento uma breve caracterização da turma e da escola, a ancoragem e organização da Unidade de Ensino, as estratégias adotadas na lecionação da Unidade de Ensino, as tarefas propostas, a avaliação e uma reflexão sobre as aulas que decorreram durante este período. Ao longo da secção onde são descritas as tarefas, também são apresentados os conceitos matemáticos como foram introduzidos ou recordados aos alunos.

3.1. Contexto escolar

3.1.1. Caracterização da escola

A Escola Secundária de Caneças pertence ao Agrupamento de Escolas de Caneças, concelho de Odivelas, e é sede de agrupamento. O agrupamento é constituído por seis estabelecimentos de ensino, sendo quatro do ensino pré-escolar e do 1.º ciclo, uma de 2.º ciclo, incluindo ainda o 7.º ano de escolaridade e a sede de agrupamento que corresponde a uma escola de 3.º ciclo do ensino básico, ensino secundário, cursos vocacionais e ensino noturno.

O agrupamento contempla, assim, todos os anos de escolaridade sendo que na Escola Secundária de Caneças também oferece o ensino recorrente e a formação escolar de adultos, salientando também o ensino noturno que para muitos adultos, foi fundamental visto conseguirem frequentar a escola para melhorarem as suas qualificações.

Segundo o seu Projeto Educativo, com período de vigência de 2014 a 2018, o Agrupamento de Escolas de Caneças recebe alunos de meios diversificados, tais como, Casal de Cambra e Casal Novo, Caneças, D. Maria, Almargem do Bispo, Camarões, entre outros.

A maioria dos alunos deste agrupamento provem de um meio socioeconómico desfavorecido, visto que 40% beneficiam de auxílios económicos (ASE). A escolaridade da população é, em geral baixa, havendo um grande número de famílias desestruturadas, com baixos rendimentos e um grande número de desempregados.

Neste concelho de Odivelas existe uma taxa de, aproximadamente, 2,86% de analfabetismo (*Censos 2011*), sendo que em Caneças a taxa é de 4,07% e em Almargem do Bispo é de 5,07%, o que é considerado bastante significativo, no panorama nacional.

Muitos dos alunos do agrupamento, como é salientado no projeto educativo (2014/2018), provêm de famílias em que os pais têm poucas habilitações, na sua maioria ao nível do ensino básico, e, muitas vezes, não valorizando o investimento na educação dos filhos e manifestando pouco interesse pela vida escolar dos mesmos. Este facto torna-se preocupante, pois o insucesso dos alunos é visto por parte das famílias como algo natural.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma do 8.º ano de escolaridade onde realizei o estudo é constituída por 30 alunos, dos quais 17 rapazes (57%) e 13 raparigas (43%). Este grupo manteve-se muito semelhante ao do ano letivo anterior, tendo apenas sido integrados nesta turma dois alunos que estão a repetir o 8.º ano de escolaridade e uma outra aluna que veio de Angola este ano. A média de idades da turma é 13,2 anos, estando estas compreendidas entre os 12 e os 15 anos. Apenas um aluno tem necessidades educativas especiais (NEE). Em geral, é uma turma com dificuldades a todas as disciplinas mas, em particular, na disciplina de Matemática.

Os alunos, apesar das suas dificuldades e da sua baixa autoestima em relação às suas capacidades e possibilidades de sucesso na disciplina de Matemática, são bastante participativos embora um pouco desorganizados nas suas intervenções nas aulas. Uma das principais dificuldades de lecionação nesta turma é manter os alunos concentrados e focados durante todo o período de duração da aula de 90 minutos, mas também de os incentivar ao estudo fora da sala de aula, motivando-os a adquirirem hábitos de trabalho.

No ano letivo anterior, 13 alunos (43%) obtiveram nível 2 na disciplina de Matemática e não mantiveram a mesma professora de Matemática, o que pode ter obrigado a um período de habituação aos métodos implementados pela professora deste ano letivo. Mais de metade da turma, no inquérito realizado no início do presente ano letivo, considerou que o desinteresse pela disciplina é o que mais contribui para o seu insucesso escolar.

A turma, na sua maioria, provem de uma classe socioeconómica media-baixa e, como tal, 10 alunos (30%) têm ASE (ação social escolar). Estes alunos são provenientes de famílias em que 27% dos pais e 23% das mães tem apenas o ensino secundário, enquanto que 3% dos pais e 17% das mães tem um curso superior. Estas baixas taxas de escolaridade são preocupantes, pois muitos dos alunos não são motivados pelos pais ao sucesso escolar e à importância da continuação dos seus estudos. Apenas uma das alunas não vive com nenhum dos progenitores, tendo vindo para Portugal neste corrente ano letivo para viver com um familiar.

Também no inquérito, foi possível verificar que 53% dos alunos respondeu que não fala com os pais sobre a escola nem sobre o seu estudo e 33% não pensa em prosseguir os seus estudos para o ensino superior. Apesar de 66% dos alunos no inquérito ter respondido que estuda diariamente, o mesmo não foi verificado durante este período, pelo menos na disciplina de Matemática, sendo que os outros 33% afirmam que raramente estudam ou só o fazem na véspera de testes. A maioria dos alunos não realiza o trabalho de casa proposto nem apresenta dúvidas nas aulas de esclarecimento antes das fichas de avaliação.

No final do 1.º período deste ano letivo (2015/16), 28 alunos tiveram nível 2 e apenas 2 alunos obtiveram nível 3, obtendo assim um total 93% de classificações negativas, tornando a Matemática a disciplina com maior percentagem de insucesso da turma (Figura 1). Estas classificações, como já foi referido, são, maioritariamente, consequência da falta de hábitos de trabalho e estudo fora da sala de aula. Além deste facto, a maioria dos alunos revela bastantes dificuldades nos conteúdos de anos letivos anteriores, manifestando falta de bases na disciplina de Matemática.

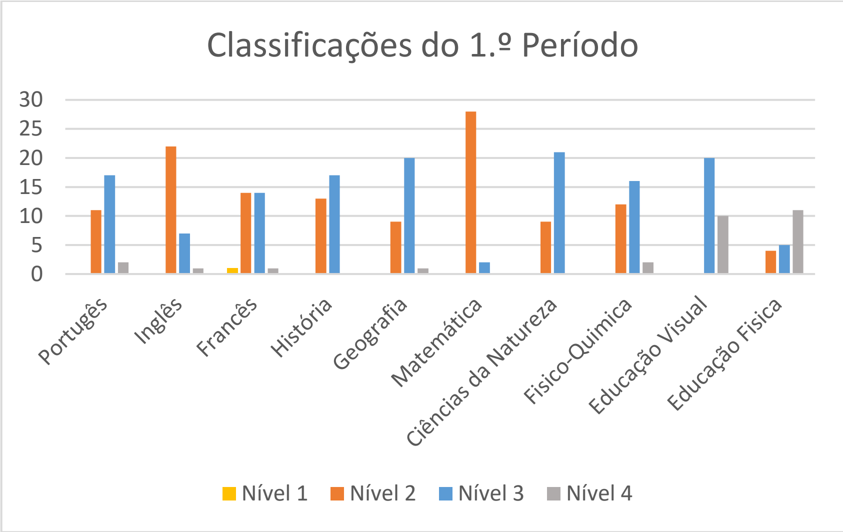


Figura 1- Classificações do 1.º Período

No 2.º período, os alunos subiram, na sua globalidade, as classificações (Figura 2), apesar de continuarem a ser uma turma sem classificações de nível superior a 4, salientando-se, contudo, que o aluno que teve nível 1 na disciplina de Francês passou para nível 2. Esta evolução global mais positiva justifica-se porque a maioria da turma durante o 2.º período empenhou-se mais no trabalho dentro da sala de aula e isso foi refletido nas suas aprendizagens.

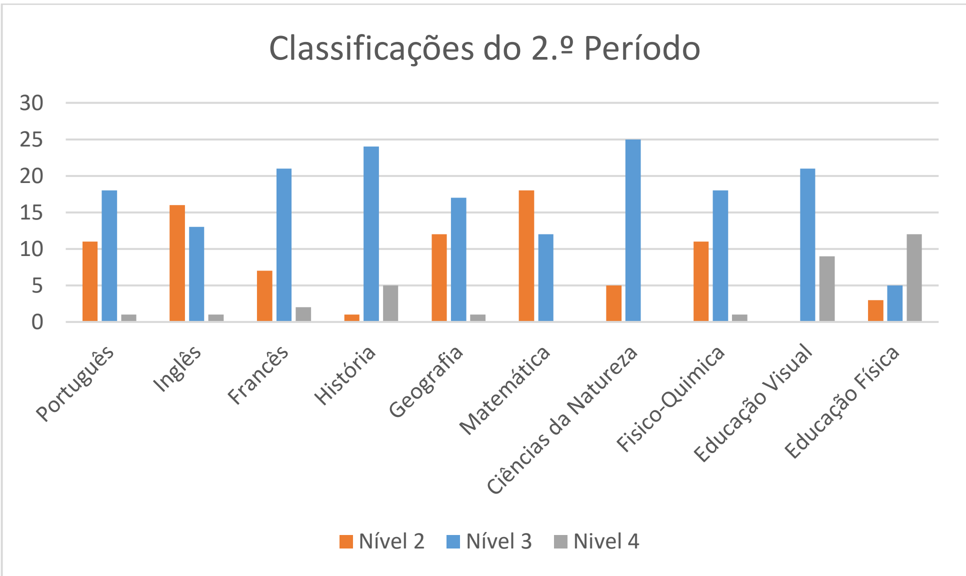


Figura 2 - Classificações do 2.º Período

No 2.º período, das três disciplinas com uma taxa de insucesso superior a 50%, apenas duas mantiveram essa taxa, nomeadamente as disciplinas de Inglês e de

Matemática. Salientando-se também que, dos 21 alunos que apresentaram três ou mais classificações negativas, cinco desses conseguiram recuperar, e, dos 11 alunos que tinham classificação negativa cumulativamente nas disciplinas de Português e de Matemática, quatro desses alunos recuperaram.

Também no 2.º período já três disciplinas apresentam uma média positiva - História, Educação Física e Educação Visual - tendo uma média de 3.13, 3.3 e de 3.3, respetivamente. A média na disciplina de Matemática passou de 2,07 para 2,4, devido a doze dos alunos da turma terem nível 3 ao invés dos dois alunos que tiveram essa classificação no período anterior, mantendo-se contudo, e apesar deste importante aumento, a disciplina com a média mais baixa.

A recuperação, o esforço e o trabalho nesta turma são evidentes, apesar de as classificações continuarem abaixo do desejável, no final do 2.º período foi a turma do 8.º ano de escolaridade da escola em que se registou a maior diminuição na taxa de insucesso em Matemática.

No 3.º Período, as classificações a Matemática mantiveram-se muito equiparadas às classificações obtidas no período anterior: apenas um dos alunos que teve nível 2 passou a ter nível 3, e um dos alunos que teve nível 3 passou para nível 4. Desta forma, os restantes vinte e oito alunos da turma mantiveram as classificações e, portanto, a média da turma aumentou de 2,4 para 2,47 na disciplina de Matemática, continuando a ser a disciplina com a média mais baixa. Apesar de as classificações não se terem alterado significativamente foi notório a continuação do esforço e empenho de alguns alunos.

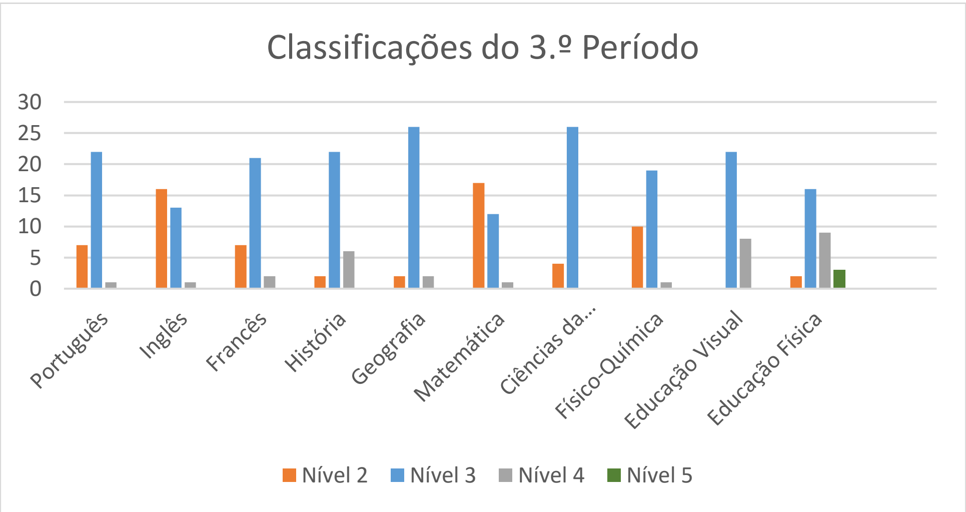


Figura 3 - Classificações do 3.º período

Além das três disciplinas que tiveram média positiva no 2.º período, a disciplina de Geografia aumentou a sua média para 3 neste período. A disciplina de História manteve a média de 3,13, a disciplina de Educação Visual desceu para 3,27 mas a disciplina de Educação Física aumentou para 3,43. Este aumento na disciplina de Educação Física foi maioritariamente conseguido devido a um dos alunos da turma ter obtido nível 5 nesta disciplina. Desta forma, este foi o primeiro período onde existiu uma classificação de nível superior a 4.

3.2. Ancoragem e Organização da Unidade de Ensino

Para a organização da Unidade de Ensino utilizei, maioritariamente, dois documentos principais de referência: o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) e a brochura da Álgebra no Ensino Básico (Ponte et. al., 2009).

O estudo das funções é um tema crucial na disciplina de Matemática como está evidente na brochura da Álgebra no Ensino Básico:

> Nos nossos dias, cada vez mais se dá destaque ao conceito de função, tendo as expressões que são apresentadas aos alunos conhecido uma grande simplificação. Alguns autores defendem que o papel das funções devia ser ainda mais reforçado do que aquilo que já é habitual nos nossos dias (Ponte et al., 2009, pp. 12-13).

A subunidade Gráficos de Funções Afins está incluída no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013, p.65) na unidade Funções, Sequências e Sucessões e tem como principais objetivos, identificar as equações das retas no plano e resolver problemas envolvendo gráficos e equações das retas. Esta subunidade está estruturada na planificação anual da Escola Secundária de Caneças em cinco etapas: 1) revisões; 2) reta não vertical que passa na origem e gráfico de uma função linear; 3) reta não vertical e gráfico de uma função afim; 4) relação entre declive e paralelismo de retas; 5) reta vertical e declive de uma reta não vertical. Estão definidos 16 tempos para esta subunidade, acrescendo ainda dois tempos para a avaliação sumativa.

O meu estudo incidiu na noção de declive e, portanto, vai ao encontro de vários descritores presentes nesta unidade. O descritor 1.1 refere que o **declive** dos gráficos de funções lineares é o valor da ordenada quando a abcissa é igual a 1 ou, ainda, que é igual à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas. Este descritor é bastante importante para o estabelecimento de uma ponte entre os conteúdos do 7.º e os do 8.º ano de escolaridade pois relaciona o declive com a constante de proporcionalidade. O descritor 1.3 designa os coeficientes a e b, da equação de uma reta por **declive** e ordenada na origem, respetivamente. Este descritor também é fundamental em termos de nomenclatura, mas também no estudo das múltiplas representações, principalmente na conversão entre a representação gráfica e a respetiva expressão algébrica pois os alunos ao fazerem a conversão para a expressão algébrica necessitam do valor do declive e do valor da ordenada na origem. No descritor 1.4 é introduzido a noção de retas paralelas através do valor do **declive**, este descritor em particular também será visado pelo meu estudo porque se relaciona com a noção de declive e na sua influência na inclinação de uma reta. No descritor 1.5 é apresentada a fórmula para calcular o **declive** de uma reta a partir de dois dos seus pontos. Para apresentar esta fórmula aos alunos pode-se relacionar, numa fase inicial, com o descritor 1.1 para o caso das funções lineares e, portanto, com a constante de proporcionalidade, levando os alunos a relacionar os vários tipos de função e a construir conhecimento novo a partir de conhecimento prévio.

No que diz respeito à resolução de problemas, os descritores 2.1 e 2.2 também estão relacionados diretamente com o declive, pois os alunos precisam de determinar a expressão algébrica a partir de dois pontos da reta e, portanto, irão utilizar a fórmula do cálculo do declive e determinar equações de retas paralelas e consequentemente relacionar o declive com o paralelismo de retas.

Em relação ao conceito de função trabalhado no 7.º ano de escolaridade, após a realização da Ficha Diagnóstico pude verificar que os alunos apresentaram bastantes dificuldades nestes conteúdos. Salientando-se do Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2013, p.54-55) vários descritores que são de extrema importância para a lecionação da subunidade "Gráficos de Funções Afins" do 8.º ano de escolaridade. O descritor 1.9 onde os alunos têm que identificar gráficos cartesianos de uma dada função e o descritor 1.10 salienta que, além de terem que identificar também têm que representar funções em múltiplas representações. Os descritores 2.3 e 2.4 apresentam as funções constante e linear, respetivamente. Também, serão muito importantes para a meu estudo os descritores 3.1, 3.2 e 3.3 pois é o momento em que se introduzem as funções de proporcionalidade direta.

O tema "Gráficos de funções afins" foi lecionado na íntegra por mim, como tal pude organizar totalmente a unidade antes do início da lecionação da mesma. Organizando os conteúdos que pretendia introduzir, ou consolidar em cada aula, na sua maioria propus tarefas para esse fim. No decorrer da intervenção, tive que ir sempre ajustando o planeamento, quer por algumas vezes não ter conseguido cumprir o plano de aula, quer pelas dificuldades que os alunos manifestaram, sendo necessário mais tempo para as ultrapassar do que o inicialmente previsto.

No quadro seguinte, apresento a planificação global da subunidade que lecionei.

Quadro 1- Plano global da Unidade de Ensino

Tópico: Funções, Sequências e Sucessões **Subtópico:** Gráficos de funções afins			
Aula	**Tópicos da aula**	**Objetivos**	**Tarefas**
Aula 0 16 de março (45 minutos)	- Ficha Diagnóstico sobre o subtópico "funções" do 7.º ano	- Identificar aprendizagens dos alunos no subtópico "funções" do 7.º ano	- Ficha diagnóstico
1.ª aula 4 de abril (90 minutos)	- Conceito e definição de função; - A função de proporcionalidade direta; - A função linear; - A representação gráfica: a função de proporcionalidade direta e a função linear; - A função constante.	- Relacionar situações de proporcionalidade direta com funções de proporcionalidade direta; - Relacionar funções de proporcionalidade direta com funções lineares; - Recordar as representações de uma função linear: numérica, algébrica e gráfica; - Reconhecer a constante de proporcionalidade em diferentes contextos: múltiplas representações - Interpretar uma função constante.	- Ficha de Trabalho n.º1
2.ª aula 6 de abril (45 minutos)	- A função linear; - A noção de coeficiente de x numa função linear; - Gráfico de uma função linear.	- Interpretar a expressão algébrica e a representação gráfica de uma função linear; - Reconhecer e interpretar o coeficiente de x na função linear; - Representar graficamente uma função linear;	- Ficha de Trabalho n.º2
3.ª aula 7 de abril (90 minutos)	- A função afim; - A noção de coeficiente de x e de termo independente, numa função afim; - Gráfico de uma função afim.	- Recordar as representações de uma função linear: numérica, algébrica e gráfica; - Representar algebricamente e graficamente uma função afim; - Relacionar funções lineares com funções afins; - Reconhecer a imagem de um como coeficiente de x , dada uma função linear; - Resolver problemas com as funções linear e afim.	- Ficha de Trabalho n.º3

4.ª aula 11 de abril (90 minutos)	- A função afim em diferentes representações; - Noção de declive, de ordenada na origem e respetivas interpretações geométricas.	- Representar algebricamente e graficamente uma função afim; - Relacionar funções lineares e funções afins; - Reconhecer o gráfico de uma função afim como a translação do gráfico de uma função linear segundo um vetor; - Reconhecer, dada uma função linear, a imagem de um como coeficiente de x ; - Identificar que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares; - Interpretar a função linear e a função afim atendendo a diferentes contextos; - Resolução de problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra; - Recordar as noções de declive e ordenada na origem; - Identificar geometricamente e algebricamente a ordenada na origem; - Identificar geometricamente o declive de uma reta; - Recordar a noção de paralelismo.	- Ficha de Trabalho n.º3 (continuação) - Tarefa "Funções no GeoGebra"
5.ª aula 13 de abril (45 minutos)	- A função afim.	- Consolidar as noções de declive e ordenada na origem; - Consolidar a noção de gráfico de uma função afim como translação de uma função linear, e reciprocamente; - Representar algebricamente e graficamente uma função afim; - Representar algebricamente uma função afim, dada a representação gráfica de uma função linear com o mesmo coeficiente; - Determinar a interseção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados.	- Tarefa "Funções no GeoGebra" (continuação)
6.ª aula 14 de abril (90 minutos)	- Cálculo analítico do declive; - Paralelismo de retas; - A reta não vertical.	- Identificar o coeficiente de uma função linear como o declive de uma reta; - Consolidar a noção de que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares; - Reconhecer e calcular o declive de uma reta como $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, para $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos da reta, e $x_B \neq x_A$; - Reconhecer retas paralelas como retas que têm o mesmo declive.	
7.ª aula 18 de abril (90 minutos)	- A função afim nas diferentes representações. - Gráficos de funções afins.	- Consolidar o cálculo analítico do declive de uma reta. - Resolver problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra; - Reconhecer, a representação gráfica de uma reta com declive negativo.	- Tarefa "Um passeio de bicicletas"

8.ª aula 20 de abril (45 minutos)	- Gráficos de funções afins; - A reta vertical e a reta horizontal.	- Consolidar a noção de declive de uma reta; - Identificar que todos os pontos de uma reta vertical têm a mesma abcissa; - Reconhecer a equação de uma reta vertical como $x = c$ e que essa reta passa no ponto de coordenadas $(c, 0)$; - Reconhecer que o declive da reta horizontal é nulo.	
9.ª aula 21 de abril (90 minutos)	- Gráficos de funções afins.	- Interpretar a função em diversas representações; - Consolidar a noção de declive; - Resolver problemas com a função afim; - Determinar a ordenada na origem recorrendo a um outro ponto da reta.	- Ficha de Trabalho n.º 4
10.ª aula 27 de abril (45 minutos)	- Gráficos de funções afins.	- Consolidar os conteúdos da temática "Gráficos de Funções Afins"; - Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação sumativa.	
11.ª aula 28 de abril (90 minutos)	- Dízimas finitas e infinitas periódicas; - Equações do 2.º grau; - Gráficos de funções afins.	- Realização do teste de avaliação sumativa.	- Ficha de avaliação sumativa

3.3. Estratégias de Ensino

Ao longo da subunidade de ensino, os alunos trabalharam a pares durante os momentos de trabalho autónomo, bem como nos momentos de exploração de tarefas e trabalharam em grande grupo, tanto nos momentos de discussão alargada a toda a turma como nos momentos de síntese. Apenas no momento de avaliação sumativa, que coincidiu com a última aula do estudo, os alunos trabalharam individualmente. Esta organização pretendia naturalmente que os alunos ao trabalharem a pares beneficiem das interações entre eles e na capacidade de argumentação das suas ideias e processos matemáticos, ajudando na construção do seu próprio conhecimento, pois "situações que levem os alunos a apoiar os outros e a receber ajuda dos pares constituem experiências ricas na reestruturação dos seus próprios conhecimentos, na regulação das suas aprendizagens, e no desenvolvimento da responsabilidade e da autonomia" (Santos, 2002, p. 2).

Os momentos de grande grupo eram aproveitados, para além de esclarecer eventuais dúvidas e consolidar alguns conceitos, para potenciar a capacidade transversal de comunicação matemática dos alunos, que considero estratégico para a sua consolidação de conceitos. Na verdade, uma grande dificuldade que tenho sentido nos alunos é a sua capacidade de argumentação e, como tal, considero que esta tem que ser trabalhada com eles, na medida em que “os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas” (MEC, 2013, p.5), colocando também o aluno num papel ativo na construção do seu próprio conhecimento.

Este ano letivo foi o primeiro ano da professora cooperante com esta turma, como tal os alunos ainda não estavam habituados a seu método de ensino. Apesar de este inicialmente ter sido uma condicionante, pois os alunos esperavam um ensino expositivo onde tinham um papel mais secundário, foram-se habituando gradualmente a uma nova forma de trabalhar. Este facto foi notório na crescente melhoria das classificações dos alunos, mas também da sua postura dentro da sala de aula, do respeito que manifestaram pelas professoras e pelos colegas e do seu próprio empenho durante as aulas. Embora não se podendo generalizar para todos os alunos da turma, verifiquei que para a sua grande maioria esta evolução positiva foi evidente.

Para mim foi fulcral, nalguns momentos na lecionação desta subunidade, o ensino exploratório, pois, como defende Ponte (2005, p.1) “o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam”. Como tal, após a realização de todas as tarefas propostas ou até mesmo, após a realização de algumas questões das tarefas (podendo existir vários momentos de discussão numa só aula) seguiu-se sempre um momento de discussão e reflexão, onde confrontei os alunos não só com diversas resoluções ou estratégias, mas também com um contínuo questionamento onde os alunos tiveram que refletir sobre o que realizaram e o que utilizaram como argumento nas suas respostas, sendo que “os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para a negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento” (Ponte, 2005, p.16).

Nesta unidade, como já referi, privilegiei o ensino exploratório, mas sempre que necessário contrabalancei com um ensino mais direto, procurando ir ao encontro das características da turma, adaptando o planeamento sempre que achei fundamental para as aprendizagens dos alunos. O planeamento foi ajustado diversas vezes devido ao plano da aula anterior não ter sido cumprido, mas também devido a dificuldades que não tinha antecipado. Antes do início do estudo planeei a nível macro a subunidade e a nível micro cada aula que iria lecionar, correspondendo a um total de 11 aulas (18 tempos de 45 minutos), estruturando as aulas e as tarefas e antecipando estratégias e dificuldades, para poder desta forma estar mais preparada para as intervenções dos alunos.

As aulas, na sua grande maioria tinham a mesma estrutura, ocorrendo vários momentos de trabalho autónomo intercalados, com momentos de discussão em grande grupo e, sempre que necessário e possível, um momento de síntese, podendo apenas mudar a ordem destes momentos, conforme o desenvolvimento da aula anterior e o objetivo para cada aula.

Nas aulas de 90 minutos, optei pela realização de uma tarefa, onde intercalava os momentos de trabalho autónomo com os momentos de discussão e introduziria um conceito ou uma noção nova. Esta opção baseou-se nas características da turma, na medida em que antes da lecionação desta Unidade de Ensino, os alunos realizaram algumas tarefas mas, se o momento de trabalho autónomo fosse demasiado alargado a maioria dos alunos dispersava-se, pelo que me pareceu necessário intercalar os momentos de trabalho autónomo com os momentos de discussão. Nas aulas de 45 minutos, normalmente os alunos consolidavam algumas noções anteriormente trabalhadas ou terminavam o trabalho iniciado na aula anterior.

Durante os momentos de trabalho autónomo, circulei pela turma monitorizando o trabalho dos alunos e também selecionando algumas das suas resoluções para puder utilizar nos momentos de discussão. Durante os momentos de discussão tinha bem presente os conceitos que queria realçar ou reforçar, mas dando sempre espaço aos alunos para intervir, interagindo sempre com toda a turma. Deste modo, procurei que as práticas de comunicação não fossem apenas um mero instrumento ou técnica do professor para ensinar Matemática, mas como algo indissociável da própria aprendizagem da Matemática, inerente aos processos de construção e partilha do conhecimento matemático (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2013).

Os recursos utilizados na Unidade de Ensino foram o computador, o projetor, materiais de desenho e durante as tarefas que necessitaram do software de Matemática dinâmica – o GeoGebra – foi utilizado um computador para cada par de alunos. Nas aulas em que utilizámos a tecnologia, fizemo-lo na sala de informática de que a escola dispõe e requisitamos mais alguns computadores portáteis para conseguirmos garantir que dispúnhamos de 15 computadores.

A opção de utilizar tecnologia baseou-se na importância que dou a uma boa dinâmica de sala de aula, mas também a uma diversificação da mesma, uma vez que os alunos habitualmente seguem sempre a mesma estrutura de aula e, desta forma, consegui alterar esse registo e proporcionar uma aula diferente aos mesmos. Também, com o objetivo de os motivar e consequentemente maximizar as suas aprendizagens, sendo que as tecnologias digitais constituem ferramentas essenciais para o ensino, a aprendizagem e o fazer Matemática (NCTM, 2007, p.2). Escolhi o *software* GeoGebra, pois acho um recurso bastante intuitivo e para os alunos que, na sua maioria, nunca o tinham utilizado, achei que a sua utilização decorreria sem dificuldades. Além disso, este recurso permite a visualização de diferentes representações simultaneamente, o que é fulcral na aprendizagem dos alunos nesta temática, pois "os alunos deverão familiarizar-se com uma série de representações de relações lineares, incluindo tabelas, gráficos e equações" (NCTM, 2007, p.334).

A turma tem bastantes dificuldades, no geral, mas, como já referi, particularmente na disciplina de Matemática, pelo que, como era expetável, surgiram bastantes dificuldades no estudo desta temática, principalmente devido à reduzida experiência dos alunos na Álgebra e algumas lacunas ao nível do seu pensamento algébrico. O primeiro contacto dos alunos com a Álgebra é através da determinação da expressão geradora de uma sequência, no 6.º ano de escolaridade, mas sem aprofundarem a noção de incógnita, sendo que esta noção só é trabalhada a partir do 7.º ano de escolaridade e durante um período curto de tempo. Antes da lecionação desta unidade, os alunos trabalharam os monómios e os polinómios que foi uma oportunidade para serem trabalhados os conceitos algébricos. Com este estudo inicial, minimizamos algumas das dificuldades que poderiam surgir, mas apesar desse facto, os alunos manifestaram bastantes dificuldades no uso das notações matemáticas e nas noções mais abstratas da Álgebra, tais como o uso de incógnitas e a obtenção de pontos dada uma expressão algébrica. Outro aspeto importante, foi o facto de alguns alunos apesar de compreenderem as noções que deveriam ser utilizadas, tinham dificuldades nos cálculos analíticos, como é o caso do cálculo analítico do declive ou no cálculo de uma imagem conhecendo o objeto de uma função.

Devido à falta de bases desta turma, os cálculos sem o auxílio da calculadora, foram naturalmente um problema. Como tal, nalguns momentos onde o foco estava nas funções e não nos cálculos permiti que os alunos recorressem à calculadora mas tentei na maioria dos momentos incentivar os alunos a não recorrerem à mesma, de modo que trabalhassem o cálculo mental e que recuperassem a agilidade e o raciocínio matemático.

3.4. As tarefas

O objetivo do meu estudo é a compreensão por parte dos alunos da noção de declive nas funções afim, linear e constante, pelo que, para trabalhar com a turma esta noção recorri maioritariamente a tarefas de índole exploratória.

Optei pelo ensino-aprendizagem exploratório ao invés do ensino direto, na medida em que a principal característica do ensino exploratório é "que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p.13), dando assim ênfase às tarefas de exploração e aos momentos de discussão professor-alunos.

As tarefas em que os alunos trabalharam foram desenvolvidas por mim e pela minha colega, sendo algumas baseadas e adaptadas de manuais escolares ou outros materiais já existentes. Estas tarefas foram elaboradas tendo em conta as características específicas da turma e os conhecimentos prévios que os alunos têm, ou não, pois, como defende Ponte (2005, p.1), "é formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno".

Optei maioritariamente por tarefas de exploração, onde o objetivo será os alunos explorarem e descobrirem por si determinados conceitos, permitindo desta forma que o aluno passe a ter um papel ativo na sua própria aprendizagem, pois é "muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar" (Ponte, 2005, p.9). Apesar deste facto, também propus fichas de trabalho e questões do manual com o principal objetivo de consolidação ou revisão de alguns conhecimentos, como por exemplo, as três primeiras fichas de trabalho pois essas incidiam sobre tópicos do ano letivo anterior cujo objetivo era recordar conceitos.

Tendo em conta, que eu e a minha colega lecionamos a mesma subunidade, todas as fichas de trabalho, tarefas e questões que propus foram elaboradas conjuntamente, tendo sido aplicadas nas duas turmas simultaneamente.

3.4.1. Ficha Diagnóstica

A ficha diagnóstica (Anexo 1.1) foi realizada na última aula do 2.º período e tinha como objetivo aferir a consolidação de conhecimentos e identificar as dificuldades que os alunos ainda tinham no tema das Funções lecionado no 7.º ano de escolaridade. Esta ficha foi realizada no período anterior ao da lecionação da Unidade de Ensino, garantindo assim que tinha tempo suficiente para analisar todas as resoluções dos alunos e alterar o que fosse necessário no planeamento da Unidade de modo a colmatar as dificuldades detetadas.

A ficha continha sete questões, a sua estrutura foi planeada de acordo com o programa do 7.º ano de escolaridade, mas também com o grau de dificuldade de cada questão. O objetivo, naturalmente, não era a ficha conter um elevado grau de dificuldade, pois se tal acontecesse os alunos poderiam não conseguir responder a algumas questões e não conseguiria aferir que tipo de dificuldade estaria o aluno a sentir.

A primeira questão incide sobre o conceito de função, sendo de extrema importância a justificação dada por cada aluno, mais que a escolha das opções. Tendo sido também apresentadas diversas representações de funções, tabular, representação gráfica e diagrama sagital.

A segunda questão, incide na análise e compreensão de um diagrama sagital, onde se espera que os alunos consigam identificar o domínio, contradomínio, conjunto de chegada, um objeto dada a imagem e uma imagem dado o objeto. A quarta questão é idêntica, mas é apresentado uma representação gráfica ao invés de um digrama sagital.

Na terceira questão são apresentadas três expressões algébricas e já é pressuposto os alunos distinguirem as funções afins, lineares e constantes, mas também verificarem se um ponto pertence ao gráfico de uma das funções apresentadas.

Com a quinta questão pretende-se apenas que os alunos associem as expressões algébricas às respetivas representações gráficas apresentadas.

As duas últimas questões incidem nas funções de proporcionalidade direta, sendo a última um problema de contexto real.

3.4.2. Ficha de trabalho n.º 1 – Funções

Esta ficha (Anexo 1.2) foi trabalhada na primeira aula da Unidade de Ensino, coincidindo com a primeira aula do 3.º Período. Os alunos antes de iniciarem esta ficha de trabalho, resolveram em grande grupo um exemplo (Anexo 2.1) com o intuito de recordar a noção de função.

Neste momento foi também recordado a definição de função – Dados os conjuntos A e B, uma função g de A em B é uma correspondência que a cada elemento do conjunto A (domínio da função) corresponde um e um só elemento do conjunto B (conjunto de chegada); a definição de objeto – Cada elemento do conjunto A designa-se por objeto; a definição de imagem – Cada elemento do conjunto B, que corresponde a algum elemento do conjunto A, designa-se por imagem; a definição e a notação de domínio – O domínio da função g é o conjunto de todos os objetos e representa-se por D_g; a definição e a notação de contradomínio – O contradomínio da função g é o conjunto de todas as imagens e representa-se por D'_g ou CD_g; e a definição de conjunto de chegada – O conjunto de chegada é formado por todos os elementos do conjunto B (que tenham ou não correspondência com os elementos do domínio da função).

Esta ficha de trabalho contém apenas duas questões e conteúdos do 7.º ano de escolaridade. O grau de dificuldade não é elevado, sendo as questões bastante diretas, pois o objetivo desta ficha era ajudar os alunos a relembrar conteúdos do ano letivo anterior.

A primeira questão contém um gráfico de pontos representando uma situação de proporcionalidade direta, e o objetivo era interpretá-lo de forma a completar uma representação tabular, justificando que são grandezas diretamente proporcionais e dado um objeto determinar a sua imagem, desta forma os alunos trabalharam com representações distintas. A última alínea desta questão era a que tinha um grau de dificuldade mais elevado, pois era suposto os alunos escreverem a expressão algébrica e justificarem, recordando desta forma as funções de proporcionalidade direta.

Com esta primeira questão foi recordado o conceito de proporcionalidade direta: duas grandezas não nulas são diretamente proporcionais se o quociente entre os seus valores é constante (constante de proporcionalidade).

Na segunda questão era apresentado um gráfico que abrangia uma viagem de automóvel, sendo esta questão maioritariamente de interpretação e de justificação. O objetivo desta questão era relembrar a interpretação e leitura de gráficos.

3.4.3. Ficha de trabalho n.º 2 – Funções – Parte 2

A segunda ficha de trabalho (Anexo 1.3) consistia numa única questão integrada num contexto real. Esta ficha é uma continuação da anterior pois o foco continuou a ser as funções de proporcionalidade direta. À semelhança da ficha de trabalho anterior, foi apresentado um exemplo (Anexo 2.2) antes de se iniciar a resolução desta ficha de trabalho, com o objetivo de se enfatizar as múltiplas representações de uma função. Foi, também, recordado a definição de função de proporcionalidade direta – Uma função de proporcionalidade direta é toda a função definida por uma expressão analítica do tipo $y = kx$, em que k é a constante de proporcionalidade direta e $k > 0$.

Ao invés da ficha anterior apenas foi apresentado um dado – o valor unitário – e com o mesmo os alunos tiveram de preencher uma tabela e escrever a respetiva expressão algébrica, mas também representá-la graficamente, garantindo desta forma que trabalhavam as diferentes representações de uma função.

Após a construção da representação gráfica, o objetivo passou a ser os alunos retirarem vários dados importantes da mesma. Esta parte da ficha é crucial no que diz respeito aos conteúdos respeitantes ao 8.º ano de escolaridade pois os mesmos incidem maioritariamente nas representações gráficas.

Esta ficha já tem um grau de dificuldade superior à anterior devido não só aos conteúdos que são trabalhados, mas também devido à natureza dos desafios de cada uma das alíneas. Realça-se que a última alínea é de natureza mais aberta que as anteriores, e que também numa das alíneas é questionado se um determinado ponto pertence ao gráfico da função, o qual apesar de pertencer à expressão algébrica não pertence ao domínio. Desta forma, os alunos foram confrontados com a importância do domínio de uma função e de contextualizar as respostas.

Uma das capacidades transversais que também foi trabalhada com esta tarefa foi a comunicação matemática escrita, com a qual, como referi anteriormente, os alunos estão pouco familiarizados, mas é de extrema importância para as suas aprendizagens. Neste sentido, em quase todas as alíneas, reforcei a necessidade de os alunos apresentarem a devida justificação.

3.4.4. Ficha de trabalho n.º 3 – Funções – Parte 3

Esta ficha (Anexo 1.4) foi trabalhada durante duas aulas, sendo a última referente a conteúdos do 7.º ano de escolaridade.

O principal objetivo desta ficha é o estabelecimento de relação entre as funções afins e as funções lineares, mas também é o primeiro momento onde os alunos são confrontados com funções afins, pelo que foi de extrema importância a estruturação da ficha e o modo como era introduzida a função afim.

Desta forma, antes de iniciar a resolução da mesma, recordou-se a definição de função constante – Dado um número racional b, designa-se por função constante igual a b a função $\mathrm{f(x)} = \mathrm{b}$; e a função linear – Designa-se por função linear uma função para a qual existe um número racional a tal que $f(x) = ax$, e a chama-se o coeficiente de f e $a = f(1)$.

A ficha tem um contexto de realidade para que os alunos consigam relacionar o valor independente de uma função afim com um custo fixo, independente do peso das frutas que comprem para, desta forma, construírem o conhecimento mais facilmente. Esta tarefa, devido à sua natureza mais aberta tem um elevado grau de dificuldade.

A tarefa está dividida em duas questões contextuais diferentes: a primeira de natureza mais teórica e a segunda contextualizando conceitos com um problema de tarifários.

A primeira questão apresenta um referencial cartesiano contendo duas funções lineares. As três primeiras alíneas são de interpretação da representação gráfica, principalmente da leitura dos pontos apresentados. Na quarta alínea é pedido para determinarem as expressões algébricas das duas funções, apesar de este aspeto já ter sido trabalhado nas aulas anteriores, os alunos continuam a revelar bastantes dificuldades na determinação de expressões algébricas e na conversão entre representações.

As duas alíneas seguintes são de natureza mais aberta, onde a principal ênfase é na justificação e na argumentação matemática.

A sétima alínea é crucial pois é introduzido o custo fixo, desta forma os alunos começam a trabalhar com funções lineares e, ao ser introduzido este custo fixo, obtêm funções paralelas às inicialmente dadas. Assim, é introduzida a função afim a partir da translação de uma função linear, onde os alunos são confrontados com duas funções cujo valor do declive é o mesmo. As alíneas 1.7.a) e 1.7.b) desafiam os alunos a relacionarem o custo fixo com o termo independente e também pretendem auxiliar na resposta da alínea 1.7.c), onde é pedida a respetiva expressão algébrica.

Na alínea 1.8 é pedido para os alunos representarem graficamente as duas funções, obtendo assim duas semirretas paralelas. Esta alínea é fundamental para os alunos relacionarem as duas funções.

Na segunda questão são apresentados dois tarifários de telemóvel que representam duas funções lineares. O objetivo desta questão é, após a realização da questão anterior, os alunos familiarizarem-se com a função afim e agilizarem procedimentos envolvendo a mesma.

Nesta segunda parte da questão, os alunos têm que preencher uma tabela e ao contrário da questão anterior são introduzidas noções, tais como variáveis, coeficientes e termo independente. Como esta questão tem um contexto de realidade, os alunos têm que contextualizar os valores obtidos.

À semelhança da questão anterior, os alunos têm que indicar as respetivas expressões algébricas de cada tarifário apresentado.

Como o principal objetivo desta ficha era introduzir a função afim, no final da mesma foi apresentado aos alunos a definição de função afim – Uma função afim é definida por uma expressão algébrica do tipo $\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$.

3.4.5. Tarefa "Funções no GeoGebra"

Esta tarefa (Anexo 1.5) foi construída para ser resolvida recorrendo ao *software* de Geometria Dinâmica, o GeoGebra. Apesar de não ser uma tarefa com um elevado grau de dificuldade, tendo em conta que foi a primeira tarefa utilizando tecnologia, as dificuldades inerentes a esta facto aumentam o seu grau de dificuldade. Esta tarefa prolongou-se durante duas aulas e tinha como objetivo os alunos obterem gráficos de funções paralelas. A utilização deste recurso permitiria aos alunos visualizarem as representações gráficas e as respetivas expressões algébricas.

Com esta tarefa foi explorada a relação entre os gráficos de funções lineares e funções afins: o gráfico de uma função afim obtém-se a partir do de uma função linear por translação segundo um vetor e reciprocamente.

Esta exploração levou também a concluir que retas são paralelas quando têm o mesmo declive.

As duas primeiras alíneas tinham como objetivo familiarizar os alunos com o GeoGebra, traçando a representação de três funções e dados dois pontos traçar uma quarta representação. Com a realização das duas primeiras alíneas, o objetivo é minimizar as dificuldades na terceira alínea, que é o principal objetivo da tarefa.

Na alínea 1.3.1 foi pedido que traçassem uma função paralela à função constante apresentada na primeira alínea. Não foi pedido que essa nova função passasse em nenhum ponto em particular, tornando esta alínea de uma natureza mais aberta.

A alínea 1.3.2 é de natureza mais fechada, mas com um grau de dificuldade moderado, pois foi pedido uma função paralela, mas que essa nova função fosse linear, por isso os alunos teriam de interpretar que esta função teria que passar na origem do referencial.

A última alínea tem inúmeras respostas certas, pois apenas foi pedido que se traçasse uma função linear distinta das anteriormente representadas.

Em todas as alíneas foi pedido que escrevessem a respetiva expressão algébrica, tornando assim "obrigatório" que os alunos visualizassem a representação gráfica apresentada na folha algébrica do GeoGebra e a serem confrontados com as características comuns às funções inicialmente dadas e às obtidas.

3.4.6. Tarefa "Um passeio de bicicletas"

Esta tarefa (Anexo 1.6), foi proposta numa sala de informática, mas o uso do GeoGebra foi opcional. Desta forma, conseguiu-se enriquecer o respetivo momento de discussão obtendo estratégias mais diversificadas.

O principal objetivo desta tarefa é os alunos trabalharem a função afim, em particular a noção de declive e ordenada na origem. Desta forma, antes de se iniciar a resolução desta tarefa foi introduzido o cálculo analítico do declive.

Foram apresentadas aos alunos duas retas paralelas, gráficos de uma função linear e de uma função afim. Os alunos calcularam o declive da função linear e concluíram que o declive da função afim teria de ser o mesmo, mas quando calcularam pelo quociente entre a ordenada e a abcissa o valor não dava igual. Desta forma, os alunos foram confrontados com inviabilidade de calcularam o valor do declive de uma função afim, da maneira que calculavam no caso das funções lineares. Foi então apresentada a fórmula do cálculo do declive – Dados dois pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ distintos pertencentes a uma reta r, o declive da reta é obtido através do cálculo de $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, com e $x_B \neq x_A$.

A natureza desta tarefa é aberta e de índole exploratória, principalmente devido às duas últimas questões. Foram apresentados dois preçários do aluguer de bicicletas, sendo o primeiro apresentado através da sua expressão algébrica e o segundo apresentado na forma tabular, para desta forma os alunos trabalharem as múltiplas representações.

A primeira alínea é mais direta, questionando apenas qual seria a empresa onde seria mais vantajoso o uso de uma bicicleta durante uma hora. Os alunos teriam a hipótese de calcular analiticamente o custo de uma hora ou recorrer ao GeoGebra para ver esse custo. Os alunos também teriam de justificar a sua resposta.

Na segunda alínea os alunos tiveram de comentar uma afirmação, privilegiando a comunicação matemática, mas também com o intuito de relacionarem o custo fixo com o custo total despendido, desta forma os alunos trabalham a noção de declive e de ordenada na origem e as duas consequências no estudo de uma função, em particular no caso de uma situação contextualizada.

Na última alínea os alunos tiveram que justificar qual a empresa que o grupo de amigos deveria escolher, não tendo, contudo, sido apresentado o número de horas que iriam utilizar. Este facto foi propositado, para os alunos serem confrontados com essa decisão e argumentarem a sua escolha. Recorrendo ao GeoGebra seria mais evidente que essa escolha depende do número de horas, bem como o ponto de interseção das duas retas, pois os alunos visualizam a representação gráfica das duas funções simultaneamente.

Após a realização desta tarefa, foi introduzida a definição de reta vertical – Uma reta vertical é constituída pelos pontos com uma mesma abcissa, c, sendo a sua equação $x = c$.

3.4.7. Ficha de trabalho n.º 4 – Gráficos de funções afins

Esta ficha de trabalho (Anexo 1.7) foi a última da subunidade, quando apenas faltava lecionar a obtenção de uma expressão algébrica de uma função afim conhecendo dois pontos da mesma, mas sem que seja apresentado, na representação gráfica, o valor da ordenada na origem.

Nesta ficha de trabalho, as questões 1 e 4 são essencialmente problemas. Na primeira questão é apresentado um paralelogramo e os alunos teriam que obter as equações das retas, não tendo, contudo, uma das retas dados suficientes para se escrever a equação da mesma. Portanto para os alunos conseguirem resolver esta questão teriam de calcular as equações das retas AD, DC e BC enquanto na reta AB não tinham dados suficientes para obter a sua equação, apenas podiam concluir que devido a ser um paralelogramo teria de ser paralela à reta DC.

Na segunda questão foram apresentadas cinco retas e na primeira alínea, sem efetuarem cálculos, os alunos teriam de relacionar a sua posição com o valor do declive positivo, negativo ou nulo. Na segunda alínea teriam de relacionar as representações gráficas com as equações das retas. Esta questão é fulcral para a aprendizagem dos alunos pois não é apenas pedido para os alunos efetuarem cálculos, mas que relacionem as diferentes representações.

Na terceira questão foram dados três pontos e os alunos teriam que escrever uma equação da reta paralela à reta que contém dois deles e que passa pelo terceiro. Esta questão apesar de ser mais direta, como já referi, foi um dos primeiros momentos onde os alunos trabalham este procedimento.

A última questão contém um referencial com duas figuras geométricas e foi pedido o eixo de reflexão que transforma uma figura geométrica na outra. Esta questão relaciona vários conteúdos lecionados durante o ano letivo, pois os alunos primeiro têm de identificar o eixo de reflexão e só após isso podem escrever a respetiva equação.

3.5. A avaliação

A avaliação, ao constituir uma parte integrante do ensino da Matemática, contribui de forma significativa para a aprendizagem de todos os alunos (NCTM, 2007, p.23). Como tal, devido à sua importância, tanto para mim como para os alunos, a avaliação privilegiada durante a lecionação da Unidade de Ensino foi a avaliação reguladora, tendo apenas no final da subunidade havido um momento de avaliação sumativa, nomeadamente através de uma ficha de avaliação.

Durante todas as aulas, com a colaboração da minha colega, apontei numa grelha todas as intervenções dos alunos, seja nos momentos de discussão seja nos momentos de trabalho autónomo, pois "a avaliação das aprendizagens é todo e qualquer processo deliberado e sistemático de recolha de informação, mais ou menos participado e interativo, mais ou menos negociado, mais ou menos contextualizado, acerca do que os alunos sabem e são capazes de fazer numa diversidade de situações" (Fernandes, 2005). Desta forma foi possível sistematizar toda a informação proveniente das aulas.

Acho importante e valorizo todo o trabalho realizado dentro e fora da sala de aula, pelo que o mesmo é sempre contabilizado para a classificação final da disciplina, e não apenas a realização de duas ou três fichas de avaliação. Como tal, sempre que era proposto trabalho para casa, na aula seguinte verificava quem o tinha realizado, independentemente de o resultado estar incorreto ou correto, pois o importante será o esforço e o empenho realizado pelo próprio aluno, não sendo portanto, exclusivamente o conhecimento o único ponto que se deve avaliar.

Nesta grelha de registo de intervenções utilizada durante o ano letivo pela professora cooperante, é apontada, como já referi, todas as participações, tanto orais como escritas bem como a identificação dos alunos que iam ao quadro e, ainda, quem realizava os trabalhos de casa. Desta forma as informações ficam organizadas e constituem uma importante parte da classificação final da disciplina, juntamente com as fichas de avaliação e o portefólio entregue na última semana de aulas de cada período contendo todo o trabalho realizado. No final do período, após os portefólios serem analisados, preencho com a ajuda da professora cooperante uma folha com as melhorias que devem ser feitas no respetivo portefólio, para ser entregue aos alunos, dando oportunidade aos mesmos de melhorarem o seu trabalho.

Todas as produções escritas realizadas em sala de aula foram recolhidas e digitalizadas, entregando sempre na aula seguinte à sua realização aos respetivos alunos, onde tive também a oportunidade de as analisar e sempre que necessário ajustar o planeamento para superar eventuais dificuldades detetadas.

3.6. As aulas

3.6.1. Aula 1 – 4 de abril de 2016

Nesta primeira aula da intervenção o objetivo era recordar alguns conceitos trabalhados no 7.º ano de escolaridade, tais como o conceito de função, a função linear e de proporcionalidade direta. Preparei um documento (Anexo 2.1) com um exemplo para projetar, que continha um diagrama de setas e onde eram apresentadas algumas questões sobre alguns conceitos lecionados no ano letivo anterior. Este exemplo foi trabalhado em grande grupo de modo a que os alunos pudessem recordar alguns conceitos e esclarecer eventuais dúvidas. Ao longo deste momento privilegiei o questionamento, fomentando a interação entre os alunos para que desta forma fossem eles próprios a se confrontarem com as dúvidas dos colegas e que tentassem justificar as suas respostas. Com esta interação, consigo ter uma melhor perceção de quais as dúvidas que a turma tem, mas também com a discussão em grande grupo, incentivar a que os alunos argumentem e, consequentemente, melhorem a sua comunicação matemática.

Os alunos conseguiram associar cada conjunto do diagrama de setas ao domínio e ao conjunto de chegada, mas também distinguiram o contradomínio do conjunto de chegada. No que refere à definição de função, alguns alunos tinham uma noção da definição, pelo que apenas foi necessário esclarecer algumas dúvidas e clarificar a definição correta.

Este momento foi crucial para estabelecer a ligação com os conteúdos a lecionar nesta aula e colmatar eventuais falhas nos conhecimentos prévios necessários, bem como no sentido de contribuir para uma maior motivação e interesse dos alunos no decorrer da aula.

Durante o primeiro momento de trabalho autónomo, a maioria dos alunos demonstrou bastante facilidade na perceção que o custo de uma fotocópia seria de 3 cêntimos, como tal, a resolução das três primeiras alíneas revelou-se bastante acessível. Apesar desse facto, os alunos não conseguiram associar o valor unitário da fotocópia ao valor da constante de proporcionalidade, logo a quarta alínea, em que era pedida a expressão algébrica, tornou-se bastante difícil para a grande maioria da turma. Os alunos que conseguiram resolver esta alínea utilizaram linguagem não matemática.

Na discussão desta questão os alunos revelaram algumas dificuldades e resistência na utilização de linguagem matemática adequada, nomeadamente no que diz respeito às funções de proporcionalidade direta. A escolha de um gráfico de pontos também se revelou ser um desafio para os alunos na compreensão de que o mesmo seria uma função de proporcionalidade direta. Durante a discussão, alguns alunos não compreenderam porque é que o resultado apresentado era distinto do que tinham obtido, não percebendo que a diferença entre os valores decorreria da obtenção do resultado em euros ou em cêntimos. Também, houve alguns alunos que utilizaram o valor da fotocópia em cêntimos e pensavam que o resultado poderia ser dado em euros, sem fazer assim a respetiva conversão. Esta situação revela a falta de conhecimentos base e as dificuldades dos alunos, pelo que na elaboração da tarefa este é um fator que foi tido em consideração mas, mesmo assim, deveria ter salientado no enunciado as diversas unidades ou pedido a resposta na mesma unidade que é apresentada no enunciado.

Neste momento, também tentei explorar um pouco a obtenção da constante de proporcionalidade direta a partir do quociente entre o valor da ordenada e da abcissa de um dado ponto, manipulando a expressão algébrica da função de proporcionalidade direta. Alguns alunos perceberam essa manipulação mas não perceberam o objetivo da mesma, desta forma deveria ter sido mais explícita aquando a exposição desta manipulação e da importância da mesma.

No segundo momento de trabalho autónomo, os alunos tiverem menos dificuldades do que inicialmente tinha esperado, mostrando uma certa facilidade na leitura e interpretação de gráficos. O tempo que foi necessário para a primeira questão foi superior ao que tinha sido estimado e, portanto, os alunos tiveram menos tempo para o trabalho autónomo da segunda questão. Consequentemente, alguns alunos não tiveram tempo de finalizar a resolução da mesma.

Na discussão desta questão a maioria da turma participou ativamente mostrando interesse, apesar de, na parte final da aula, alguns alunos começaram a dispersar-se. Nesse momento, tive que tentar que a turma continuasse atenta, apesar de ter sentido grandes dificuldades nessa gestão. Este é um dos aspetos que senti mais dificuldade, pois ao tentar cativar todos os alunos, tive de parar diversas vezes a aula e nesses momentos alguns dos alunos que estavam inicialmente atentos também se começavam a dispersar.

No final da aula, ainda consegui explorar um pouco melhor a questão 2.5, o que acho que foi bastante vantajoso para a aprendizagem dos alunos, pois parece-me que consegui levar os alunos a aprofundar a interpretação de gráficos.

No plano de aula estava previsto um momento de síntese dos conteúdos, mas devido ao tempo despendido no primeiro momento de trabalho autónomo, já não houve tempo para essa síntese. Por essa mesma razão, houve alguns conceitos que não foi possível retomar nomeadamente para clarificar eventuais dúvidas que ainda podiam persistir, tais como as diferentes representações gráficas e a função de proporcionalidade direta.

A aula, na sua globalidade correu bem, na medida em que o plano de aula foi cumprido e os alunos estiveram, na sua maioria, atentos e mostraram-se participativos. Os aspetos que poderiam ser melhorados, foram a clarificação de certos conceitos, pois senti no decorrer da aula que os alunos não perceberam algumas definições, nomeadamente qual o significado da constante de proporcionalidade. Também deveria ter frisado mais a função de proporcionalidade direta, as suas principais características e a influência da constante de proporcionalidade, por exemplo, comparando duas funções de proporcionalidade direta com valores de constante de proporcionalidade distintos. Outro aspeto a considerar foram as justificações registadas no quadro, pois deveria ter mais atenção ao que estava escrito e verificado se os alunos faziam o registo das mesmas no caderno, pois é um instrumento bastante importante para um estudo posterior dos alunos em casa dos conteúdos lecionados. Sendo que, dadas as características desta turma, e tendo em conta que manifestaram bastantes dificuldades de compreensão, sinto que a adesão dos alunos aos trabalhos propostos em sala de aula foi bastante positiva.

3.6.2. Aula 2 – 6 de abril de 2016

O objetivo desta aula era dar continuidade ao trabalho realizado na aula anterior, em particular o estudo da função linear, da função de proporcionalidade direta e a relação entre as duas.

Na aula anterior (1.º - 4 de abril) pedi aos alunos para realizarem em casa duas questões do caderno de atividades de modo a tentar que trabalhassem alguns conceitos e agilizando certos procedimentos. Portanto, o primeiro segmento desta aula foi dedicado à correção do trabalho de casa, onde foi necessário mais tempo que o previsto, devido a algumas dificuldades sentidas pelos alunos que não tinham sido antecipadas.

Neste segmento houve um aluno que conseguiu concluir facilmente que numa função constante poderíamos calcular a imagem de qualquer valor de x e que o resultado seria sempre o mesmo, demonstrando aquisição de conhecimentos, mas também foi importante para o momento de discussão alargado a toda a turma, pois a maioria dos alunos não sabia que o mesmo acontecia. Consegui aproveitar a interação desse aluno para esclarecer a toda a turma esse facto e questionei alguns sobre a imagem de alguns objetos, concluindo que a imagem seria sempre a mesma e que essa imagem seria o valor do termo independente na expressão algébrica.

No final da aula anterior senti que os alunos não tinham compreendido certos conceitos importantes, e como tal o plano para esta aula teve que ser alterado para incluir um momento de discussão de um exemplo (Anexo 2.2) e síntese de alguns conteúdos. Esse exemplo continha a expressão algébrica de duas funções e os respetivos domínios. Em grande grupo foi preenchida uma tabela com os pontos pertencentes à função e algumas questões que achei fulcrais para a continuação do estudo desta temática. Os alunos pareceram interessados e participativos durante este momento e utilizaram corretamente a designação de domínio e contradomínio bem como a determinação de objetos e imagens.

Preparei uma tarefa (Anexo 1.3) para a segunda metade da aula, onde o objetivo foi trabalhar a função de proporcionalidade direta. Os alunos ao longo da tarefa iriam trabalhar com as diversas representações de uma função, a representação tabular, a expressão algébrica e a representação gráfica.

Nesta aula verificaram-se atrasos significativos tendo a maioria dos alunos efetuado apenas a resolução das duas primeiras alíneas. Assim, perante esta situação, solicitei aos alunos que terminassem a tarefa em casa.

Apesar desta situação na falta de tempo, a aula decorreu normalmente apenas não tendo sido conseguido trabalhar tudo o que estava previsto. Este facto prendeu-se não só com a duração da aula (45 minutos) mas também por esta ocorrer no período da tarde, onde sinto que os alunos já estão mais cansados, manifestando-se também bastante mais irrequietos do que é usual.

3.6.3. Aula 3 – 7 de abril de 2016

A terceira aula da intervenção foi a última aula de revisão de conteúdos programáticos lecionados no 7.º ano de escolaridade. Optou-se por introduzir a função afim pois o capítulo do 8.º ano de escolaridade que vai ser lecionado de seguida, é sobre "Gráficos de funções afins". O objetivo desta aula era a introdução de uma função afim como a translação segundo um vetor da função linear e resolver problemas com a função linear e a função afim. Deste modo, os alunos relacionariam a representação gráfica das duas funções, com o intuito de perceberem a relação dessa deslocação com o valor do termo independente.

Como na aula anterior, o plano não foi cumprido e os alunos tiveram que finalizar a resolução da tarefa em casa, o primeiro momento desta aula foi a correção da mesma, onde estavam previstos dez minutos, mas devido ao facto de ter que se fazer a correção da tarefa na sua totalidade o tempo previsto foi insuficiente.

Os alunos manifestaram bastantes dificuldades em perceber o significado de variável dependente e variável independente. Portanto, durante a discussão em grande grupo foi um aspeto que teve de ser clarificado e enfatizado regularmente. Apesar de se ter referido o domínio (na padaria apenas existiam 60 pães) alguns alunos, que na questão

1.4.2 disseram que era possível, não conseguiram relacionar que não poderíamos comprar 70 pães, pois não existia essa quantidade para venda.

Para esta aula foi ainda construída uma tarefa (Anexo 1.4) onde eram apresentadas a representação gráfica de duas funções lineares e, após a exploração de algumas questões, eram apresentadas duas funções afins que surgiam pelo acréscimo de uma taxa fixa às funções lineares. Deste modo o objetivo seria que os alunos conseguissem relacionar as duas funções e relacionassem a função afim como a translação, segundo um vetor, de uma função linear. A tarefa estava contextualizada e, supostamente, com um contexto familiar aos próprios alunos, procurando-se, desta forma, manter os alunos mais envolvidos na resolução da tarefa e que relacionassem o valor do custo fixo com o valor do deslocamento da representação gráfica segundo o vetor (0, b), sendo que o b corresponde ao valor do termo independente.

Durante o primeiro momento de trabalho autónomo os alunos manifestaram bastantes dificuldades nas alíneas que não eram resolvidas por análise direta dos gráficos. Alguns alunos não conseguiram calcular o custo de um quilo de cada fruta, revelando bastantes dificuldades no cálculo de grandezas proporcionais. A grande maioria da turma não conseguiu finalizar a resolução da questão 1 referente ao custo da cada fruta. Perante as dificuldades que os alunos começaram a ter, alguns começaram a dispersar-se e a ficar desmotivados. A discussão e correção da primeira questão foi iniciada e alguns alunos foram ao quadro resolver as quatro primeiras alíneas. Durante este momento foi pedido aos alunos que explicitassem o seu raciocínio e partilhassem com os outros elementos da turma qual o processo que utilizaram para resolver as questões, tentando desta forma envolver toda a turma, clarificando sempre que necessário a resolução que se encontrava no quadro. Como muitos alunos manifestaram dificuldades nesta tarefa, fui sempre reforçando como se deveria proceder na resolução de cada alínea e aproveitando as interações dos alunos para clarificar alguns conceitos e procedimentos.

O plano de aula não foi cumprido e, globalmente, a aula não correu muito bem, tendo em conta essencialmente a atitude menos participativa dos alunos, apesar dos esforços desenvolvidos. Por outro lado, o atraso na aula anterior não permitiu igualmente que os objetivos fossem atingidos.

Durante o decorrer da aula deveria ter reforçado a noção de constante de proporcionalidade e a sua obtenção a partir do cálculo da imagem do objeto 1 e enfatizado que o uso da regra de três simples apenas pode ser feito nas funções de proporcionalidade direta e não nas funções afins, o que poderia ser importante para evitar eventuais conceções erróneas dos alunos. Outro aspeto negativo foi o registo no quadro de algumas resoluções das alíneas da primeira questão, na medida em que algumas vezes fui questionando os alunos mas não registava no quadro, o que também não favorecia a que os alunos fizessem esse registo nos seus cadernos. Principalmente quando no enunciado da questão era pedida a justificação, desta forma seria importante que os alunos registassem no caderno a resposta correta com a respetiva justificação, mas como usualmente dava a resposta oralmente, os alunos acabavam por não registar a resposta completa ou registavam com algumas incorreções.

A turma continua com bastantes dificuldades no raciocínio proporcional e na interpretação dos enunciados. Outra dificuldade manifestada foi a formulação da expressão algébrica, pois a globalidade dos alunos não se recorda da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta nem do significado da constante de proporcionalidade, bem como se obtém a mesma.

Os alunos ainda têm bastantes dificuldades na linguagem matemática e no uso da notação de objeto, imagem e função, recorrendo na sua generalidade à linguagem não matemática para escrever uma expressão algébrica.

3.6.4. Aula 4 – 11 de abril de 2016

Esta aula tinha como objetivo trabalhar a função afim, a relação entre esta e a função linear e interpretar a função afim e a função linear em diferentes contextos com recurso ao *software* GeoGebra. Para tal, estruturou-se a aula em dois grandes momentos distintos, um primeiro onde se iria continuar a tarefa (Anexo 1.4) iniciada na aula anterior e um segundo onde se iria trabalhar numa nova tarefa (Anexo 1.5).

Para esta aula foi então elaborada uma nova tarefa para ser resolvida com recurso ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra, pelo que a aula decorreu numa sala equipada com computadores. Como foi a primeira aula de Matemática dos alunos com recurso aos computadores, a aula demorou um pouco mais que o habitual a começar porque os alunos mostraram-se irrequietos e curiosos com o que iria suceder.

Como já foi referido, no início da aula continuou-se o trabalho realizado na aula anterior, de modo que os alunos tiveram um primeiro momento para continuarem a resolução da ficha de trabalho anterior. A resolução da questão 1.5 foi feita oralmente em discussão grande grupo, onde tentei que todos os alunos participassem dando características comuns ou diferenças entre as duas funções apresentadas, pedindo sempre que justificassem as suas respostas, para enriquecer este momento.

Na questão seguinte, surgiram bastantes dificuldades porque os alunos estavam a associar a função constante ao facto de ser uma reta, isto é, pensavam que como o declive da reta mantém-se sempre constante a função seria constante. Para clarificar a representação gráfica das três funções, pedi aos alunos para me indicarem como seria a representação gráfica de uma função constante, de uma função linear e de uma função afim, representando no quadro as mesmas e reforçando as principais características de cada uma.

Mais uma vez, os alunos demonstraram bastantes dificuldades na obtenção da expressão algébrica de uma função. Durante a discussão, a turma ficou dividida entre três expressões algébricas diferentes, para tentar que todos percebessem como se obtinha a expressão algébrica de qualquer função, escrevi no quadro as três expressões obtidas e expliquei as razões para duas delas estarem incorretas. Além disso, fui sempre questionando os alunos e clarificando o que significa na expressão algébrica o custo fixo e o custo variável.

Para fazerem a representação gráfica de uma função, quase toda a turma manifestou dificuldade em determinar os dois pontos para traçar a reta. Após alguns esclarecimentos, projetei um ficheiro no GeoGebra com a representação das funções f e j e mostrei à turma que se obtinha a função j a partir da deslocação da função f segundo um vetor (0,2), com o intuito de os alunos relacionarem a função linear e a função afim como sendo paralelas e associarem a deslocação ao valor da ordenada na origem que era o custo fixo do nosso problema.

Para reforçar o momento anterior, mostrei com o GeoGebra mais um exemplo de duas retas paralelas e introduzi as noções de declive e ordenada na origem. Mostrei alguns exemplos de expressões algébricas e fui questionando os alunos sobre exemplos de outras funções paralelas às dadas e que passassem em determinados pontos. Em todo este segmento da aula, fui sempre esclarecendo eventuais dúvidas que surgissem e tentando envolver toda a turma na discussão.

Na segunda parte da aula, os alunos iniciaram o trabalho autónomo nos computadores. Além de ter sido distribuída uma nova ficha de trabalho também foi distribuído um guião (Anexo 2.4) para o GeoGebra. Todos os computadores continham uma pasta com um ficheiro do GeoGebra em branco e foi pedido sempre aos alunos que fossem gravando as alterações que iam realizando no ficheiro. Neste momento todos os alunos trabalharam a pares, tendo um computador para cada par.

Os alunos adaptaram-se rapidamente ao software GeoGebra, apesar de demonstrarem pouca prática no manuseamento de computadores deste tipo, principalmente na utilização de teclados. Este facto poderá prender-se com a crescente utilização de Tablets e o uso tátil nas novas tecnologias. Demorou-se um pouco mais que o tempo previsto na tarefa iniciada na aula anterior e como tal não houve tempo para se fazer a discussão, não tendo a maioria dos alunos feito a última questão da mesma. A maioria dos alunos conseguiu resolver a tarefa, mas como estavam a usar os computadores, não registavam na folha as conclusões obtidas com o GeoGebra, desta forma alguns alunos não visualizavam as equações das retas nem as semelhanças com as equações das retas paralelas, que era um dos objetivos desta tarefa, perdendo um pouco do trabalho que deveria ter sido feito para reforçar a noção de declive.

Apesar de o plano de aula não ter sido cumprido, a aula decorreu normalmente e os alunos mostraram-se, na sua grande maioria, interessados e participativos.

3.6.5. Aula 5 – 13 de abril de 2016

O objetivo desta aula foi recordar as noções de declive e de ordenada na origem e a obtenção de uma expressão algébrica de uma função paralela a outra mas, principalmente, agilizar e familiarizar os alunos nestes processos e cálculos, aproveitando o facto de ser uma aula de apenas 45 minutos.

Para esta aula foi previsto um momento de discussão da tarefa iniciada na aula anterior, resolução de exercícios do manual escolar dos alunos e respetiva discussão.

A discussão da tarefa foi feita utilizando apenas um computador, pois a aula já não decorreu numa sala equipada com computadores. Fui inserindo no *software* GeoGebra as resoluções de alguns alunos e projetando, para toda a turma conseguir visualizar e participar na discussão. No final da discussão relembrei que a função afim é obtida a partir da soma de uma função linear com uma função constante. Este segmento correu bastante bem, pois a maioria dos alunos ainda não tinha evidenciado este facto e as suas reações foram bastante positivas, chegando a referir que assim fazia sentido as letras das expressões algébricas serem sempre a para o valor declive e b para o valor da ordenada na origem. Acho que este momento foi bastante importante para os alunos e para as suas aprendizagens, pois conseguiram relacionar as expressões algébricas das três funções.

Após este momento, os alunos iniciaram a resolução das questões 1 e 2 da página 169 do manual, num momento de trabalho autónomo a pares. A maioria da turma não conseguiu, contudo, resolver as questões, demonstrando imensas dificuldades. Como tal, apesar do planeado, interrompi o momento de trabalho autónomo e dei uma explicação alargada a toda a turma e a primeira questão foi resolvida em grande grupo.

Os alunos perceberam que se tratavam de três retas paralelas, mas tiveram bastantes dificuldades na interpretação do enunciado. A maioria não percebeu que era para associar cada uma das retas à respetiva representação gráfica e não conseguiram relacionar os pontos dados com as representações. Este facto, também aconteceu porque no referencial não estava marcado nenhum ponto, o que dificultou a leitura do mesmo. Talvez, para tal não voltar a suceder, seria preferível apenas apresentar duas retas, uma reta a representar uma função linear e outra a representar uma função afim e, na função afim, ser dado o valor da ordenada na origem no respetivo referencial. Só após a resolução de um exercício deste género os alunos devessem resolver um como foi proposto.

Teve igualmente de ser enfatizado a relação de um ponto do tipo $(0, b)$ com o valor da ordenada na origem. Fui pedindo aos alunos que marcassem diversos pontos desse tipo, para eles visualizarem que esses pontos ficariam sempre sobre o eixo das ordenadas e, de seguida, fui questionado sobre o valor da ordenada na origem e o que o mesmo representava graficamente. Desta forma, senti que os alunos conseguiram relacionar melhor, apesar de ser necessário praticar mais exercícios deste género.

Apesar de não terem sido realizados todos os exercícios que tinham sido planeados, a aula foi bastante positiva para as aprendizagens dos alunos, pois durante a mesma os alunos manifestaram bastantes dificuldades e fui sempre atendendo às questões, esclarecendo-as e tentando que os alunos relacionassem os conhecimentos prévios com os novos conhecimentos.

3.6.6. Aula 6 – 14 de abril de 2016

Esta aula foi iniciada com a correção do trabalho de casa. Como estava planeado apenas corrigir as questões onde surgiram dúvidas, no início da aula questionei os alunos sobre as dificuldades aquando da sua resolução.

O trabalho de casa consistia na resolução das questões 2 e 3 da página 169 do manual. Sendo assim, ficou estipulado no início da aula que seriam corrigidas a questão 2 e as alíneas c) e d) da questão 3.

A questão 2 foi corrigida oralmente, questionando durante todo o momento os alunos sobre o que era pedido e que dados precisaríamos de conhecer para conseguir escrever a expressão algébrica. Devido às dificuldades que os alunos manifestaram sobre a obtenção de uma expressão algébrica nas aulas anteriores, aproveitei este momento para clarificar como se obteria a ordenada na origem e do declive de uma reta.

A maioria dos alunos não fez as alíneas c) e d) da questão 3, o que também dificultou a discussão da mesma, pois os alunos estavam poucos participativos. À medida que fui interagindo com a turma, consegui perceber que as suas principais dificuldades incidiam na interpretação do enunciado, pois não perceberam o que significava uma reta intersetar os eixos coordenados. Como tal, optei por desenhar um referencial com uma reta, a título de exemplo, que intersetava os eixos coordenados e representei os pontos de interseção. Fui questionando os alunos sobre esses mesmos pontos e como estavam sobre os eixos que característica teriam. Alguns alunos conseguiram visualizar que a abcissa ou a ordenada seria zero, dependendo sobre que eixo se situava o ponto. Aproveitando as interações destes alunos, esclareci e reforcei para a restante turma este facto. Devido às reações dos mesmos, consegui perceber que a representação gráfica ajudou na aprendizagem deste conceito, pois os alunos conseguiram visualizar o que lhes estava a ser pedido.

Na alínea d) da questão 3, os alunos durante a discussão conseguiram perceber que poderiam optar por usar os pontos obtidos na alínea anterior e, portanto, a construção da representação gráfica da função f e da função g já não levantou dúvidas.

Após este momento, o objetivo seria introduzir o cálculo analítico do declive. Para tal, com recurso ao GeoGebra, projetei um referencial com a função linear $y = 2x$, e com os pontos (0,0), (1,2) e (3,6) marcados no mesmo. Questionei os alunos sobre que tipo de função estava apresentada e como calcularia o declive da mesma, os alunos já não se recordavam e, portanto, tive que escrever no quadro a expressão algébrica de uma função linear e questionar diretamente qual seria o valor de a. Neste momento os alunos já não manifestaram tantas dificuldades para concluir que o declive seria 2 a partir da visualização da imagem do objeto 1. De seguida, calculamos o declive para o ponto (3, 6) e os alunos conseguiram concluir que o declive daria sempre 2, independentemente do ponto escolhido, referindo até que era sempre igual pois era o valor da constante de proporcionalidade.

Tracei, no GeoGebra, dois segmentos paralelos ao eixo das ordenadas, construindo desta forma dois triângulos semelhantes, para explicar aos alunos porque é que o declive daria sempre o mesmo valor para qualquer ponto escolhido.

No mesmo referencial, tracei uma nova reta paralela, questionando os alunos sobre qual seria o valor do declive. A grande maioria da turma, relacionou corretamente que, como eram duas retas paralelas o declive seria o mesmo e, portanto, também seria 2. Escolhi um ponto aleatório da nova reta, e calculei, com o auxílio dos alunos, a razão entre a ordenada e a abcissa não obtendo o valor 2. O intuito deste momento, foi os alunos perceberem que só podemos calcular o declive através da razão entre a ordenada e abcissa de um ponto nas funções lineares e, portanto, teríamos que ter outra fórmula para calcular o declive nas funções afins. Desta forma, não apresentei unicamente a fórmula do cálculo do declive e consegui que os alunos percebessem a necessidade da utilização da mesma.

Escrevi no quadro a fórmula do cálculo analítico do declive e os alunos passaram para o caderno a mesma. Explicitei o que significava a fórmula e utilizando o exemplo anterior, em discussão em grande grupo calculamos o declive da reta paralela, obtendo desta forma que o declive seria 2. Apresentei mais dois exemplos, para os alunos perceberem como aplicavam corretamente a fórmula.

Para os alunos praticarem, no momento seguinte, trabalharam autonomamente na resolução das alíneas b) e d) da questão 6 e na resolução da questão 3. Durante este momento, circulei pelos alunos esclarecendo eventuais dúvidas e auxiliando-os sempre que necessário. Alguns alunos manifestaram algumas dificuldades na substituição dos pontos na fórmula.

Após este momento, iniciei a discussão em grande grupo das alíneas da questão 6, tendo uma aluna respondido oralmente à primeira alínea e, a maioria da turma, tinha obtido o mesmo resultado, apesar de alguns alunos acharem que estava incorreto, porque o resultado no quadro estava apresentado em número fracionário e não em decimal. Nessa altura, expliquei que os resultados eram iguais, apenas apresentados em diferentes formas. A maioria dos alunos na segunda alínea conseguiu chegar ao resultado correto, manifestando poucas dificuldades, tendo apenas alguns trocado o valor das ordenadas com o valor das abcissas. Como tal, reforcei aos alunos que deveriam sempre apresentar a fórmula do cálculo analítico do declive e só depois substituir os valores.

A resolução da questão 3, foi feita no quadro pois suscitou mais dificuldades na turma. O aluno que foi ao quadro, com a minha ajuda, foi explicando aos colegas como obteve os pontos A e B a partir da representação gráfica e como substituiu os mesmos na fórmula. Reforcei, novamente, como se obtinham os pontos e como se substituíam.

Os alunos continuaram a demonstrar bastantes dificuldades no cálculo, apresentando muitas vezes respostas incorretas, apesar da correta aplicação da fórmula. No entanto, e apesar destas dificuldades, os alunos mostraram-se interessados e participativos durante o decorrer da mesma.

O plano de aula não foi cumprido, pois ainda estava planeado a resolução de uma tarefa com recurso ao GeoGebra, mas considero, contudo, que a aula correu normalmente, apenas tendo sido necessário mais tempo do que o previsto na correção do trabalho de casa e para a clarificação de certos procedimentos e cálculos.

3.6.7. Aula 7 – 18 de abril de 2016

O objetivo para esta aula era a consolidação do cálculo analítico do declive, que foi introduzido na aula anterior, a resolução de problemas envolvendo a função linear e reconhecer a representação gráfica com declive positivo ou negativo.

Nesta aula foi distribuída uma tarefa (Anexo 1.6), na qual os alunos poderiam optar por resolvê-la com ou sem recurso ao GeoGebra. Como tal, a aula decorreu numa sala de computadores, estando disponíveis um computador para cada par de alunos.

Os alunos trabalharam autonomamente na resolução da tarefa, surgindo algumas dificuldades no cálculo do custo de uma hora utilizando a empresa P, pois a informação relativa à mesma estava apresentada na forma tabular, enquanto que na empresa M estava apresentada a expressão algébrica. Alguns alunos tentaram aplicar a regra de três simples, não tendo em conta que o custo do aluguer do capacete não é proporcional ao número de horas que se alugue a bicicleta, mas sim, que se tratava de um custo fixo.

Na questão 1.2, alguns alunos compararam apenas o custo dos capacetes e outros compararam corretamente o custo dos capacetes por hora, utilizando os dados da alínea anterior, comparando exclusivamente o custo de uma hora e interpretando incorretamente o enunciado, pois não era dado o número de horas que iriam alugar a bicicleta.

Também, surgiram bastantes dificuldades nas justificações das respostas, demonstrando pouca prática na elaboração das mesmas e na comunicação matemática.

No momento de discussão da tarefa, solicitei sempre a resolução de um aluno que utilizou o GeoGebra e outro que não utilizou, para deste modo enriquecer a discussão e mostrar resoluções distintas que os alunos poderiam utilizar. Neste momento, também reforcei que não se poderia utilizar a regra de três simples, explicitando que o custo não era proporcional, porque o custo do capacete era fixo.

Como a questão 1.2 foi a que suscitou mais dificuldades, pedi a diversos alunos que identificassem o custo de uma hora, duas horas e assim sucessivamente, para que percebessem que este depende sempre do tempo de aluguer. Na questão 1.3 projetei as funções que representavam cada uma das funções para os alunos visualizarem que as retas se intersetavam num dado ponto e que, à esquerda desse ponto, seria uma empresa mais favorável mas após esse ponto seria a outra empresa. Os alunos não estavam familiarizados com a interseção de retas e, como tal, este momento foi crucial para a aula porque só após o mesmo, os alunos conseguiram perceber o significado, neste contexto, do ponto de interseção.

Nas questões 1.2 e 1.3 reforcei a importância das justificações e solicitei a diversos alunos justificações distintas, para que os colegas que não conseguiram justificar, fossem confrontados com várias justificações corretas.

Habitualmente, a correção do trabalho de casa é feita no início da aula, mas como era importante para a aprendizagem dos alunos a resolução desta tarefa, optei por iniciar a aula com a resolução da mesma e só após corrigir o trabalho de casa.

Apesar de só ser feita a correção dos exercícios onde os alunos tiveram dúvidas, como as mesmas eram generalizadas, foi realizada a correção de todas as questões. O trabalho de casa consistia nas questões 1 e 4 da página 171 e na questão 8 da página 174.

Como havia bastantes dificuldades que tinham surgido no trabalho de casa, aproveitei para ir questionando os alunos sobre outros conceitos de funções com o intuito de esclarecer algumas dúvidas. Os alunos no início deste momento estavam bastante irrequietos e desconcentrados, mas consegui que depois se concentrassem na aula e fossem participando na discussão.

A grande maioria dos alunos tem bastante dificuldade com as notações utilizadas, não sendo imediato a obtenção do valor da ordenada na origem quando são dadas retas paralelas, através nomeadamente da representação gráfica.

Na discussão da questão 8, aproveitei as retas apresentadas para relacionar o valor do declive com a monotonia da reta. Dando um exemplo do quotidiano, relacionado as retas crescentes com as subidas e as retas decrescentes com as descidas, mas também com a inclinação das retas. Como já tínhamos calculado o valor do declive no exercício os alunos conseguiram facilmente visualizar que quando o valor do declive é positivo as retas são crescentes e quando o valor do declive é negativo as retas são decrescentes.

Os alunos iniciaram o trabalho na sala de aula, mas apenas começaram a resolução da primeira questão, tendo pedido para o finalizarem em casa.

Apesar de a planificação não ter sido totalmente cumprida, penso que os objetivos da aula foram atingidos na medida em que os alunos conseguiram relacionar positivamente a monotonia com o valor do declive e também foi trabalhada a resolução de problemas e, uma vez mais a comunicação matemática.

Sinto que neste momento, os alunos já deveriam estar mais familiarizados com alguns conceitos e procedimentos, mas que estão pouco motivados para o trabalho fora da sala de aula. Deveria ter insistido mais com a turma para a realização dos trabalhos de casa e para o trabalho extra-aula.

3.6.8. Aula 8 – 20 de abril de 2016

O objetivo desta aula era a consolidação da noção de declive e a introdução da reta vertical, identificando que todos os seus pontos têm o mesmo valor de abcissa e que a sua equação será sempre do tipo $x = c$.

Para introduzir a reta vertical, tracei no quadro um referencial e questionei os alunos como marcaria o ponto (3, 2) e o ponto (3, 5) e quantas retas conseguiria que passassem por esses dois pontos. Os alunos participaram ativamente neste momento de discussão e conseguiram rapidamente reconhecer que seria apenas possível traçar uma reta. Um dos alunos até concluiu que essa reta seria paralela ao eixo das ordenadas. Ao questionar os alunos sobre qual seria o valor do declive, um dos alunos sugeriu que recorrêssemos à fórmula do cálculo analítico do declive e, ao substituirmos na fórmula, os alunos perceberam que era impossível. Com as interações dos alunos, este momento correu muito bem e a grande maioria da turma participou e conseguiram relacionar bem, que como a reta é vertical o declive não existe e todos os pontos dessa reta têm o mesmo valor de abcissa. Como tal, foi bastante fácil os alunos compreenderem que a equação de uma reta vertical seria sempre $x = c$.

Após este momento, projetei um ficheiro no GeoGebra que já continha a reta que tinha apresentado no exemplo anterior. Utilizei um seletor para mostrar várias retas paralelas à dada, tendo desta forma os alunos conseguido visualizar o que tinha anteriormente explicado. Também, ditei aos alunos a definição de reta vertical para garantir que os alunos ficassem no caderno com o registo, frisando que a reta vertical não representa uma função, pois, neste caso, um objeto teria infinitas imagens.

À semelhança da aula anterior a correção do trabalho de casa apenas foi feita após este momento. Apesar de não haver muitas dúvidas na questão 12 da página 177, optei por a resolver para garantir que os alunos trabalhavam a interpretação geométrica do declive positivo, negativo e nulo. Solicitei a alguns alunos que me dissessem as equações das retas que tinham obtido e posteriormente relacionei o valor do declive com a monotonia e a inclinação das retas, enfatizando que o declive da reta horizontal é zero.

De seguida, os alunos trabalharam autonomamente na resolução das questões 10 e 7 da página 179 e na questão 5 da página 178, tendo solicitado aos alunos as justificações, pois tratava-se de questões de escolha múltipla.

Senti que os alunos tinham bastantes dificuldades nas justificações, revelando muitas falhas na comunicação matemática. Apesar desse facto a maioria conseguiu responder corretamente.

O plano de aula foi cumprido e na sua globalidade a aula correu bastante bem, pois os objetivos foram cumpridos e os alunos participaram ativamente nas discussões. Devido à participação dos alunos senti que a introdução da reta vertical correu muito bem, além disso mostraram-se empenhados na resolução de questões envolvendo a reta vertical conseguindo responder às mesmas, mostrando aquisição de conhecimentos.

3.6.9. Aula 9 – 21 de abril de 2016

Esta aula tinha como objetivo a consolidação dos conceitos trabalhados em aulas anteriores, através da resolução de problemas envolvendo diversos tipos de funções.

Foi elaborada uma tarefa (Anexo 1.7), contendo quatro problemas, um dos quais de natureza mais aberta com o intuito de proporcionar aos alunos a oportunidade de utilização de diversas estratégias e de mobilizar os conceitos anteriormente trabalhados.

Como previsto, alguns alunos manifestaram dificuldades na interpretação do enunciado e em perceberem que tipo de trabalho deveriam realizar. Esta dificuldade manifestou-se principalmente devido à falta de prática na resolução de problemas onde não são indicados os passos que têm de seguir para o resolver. Os alunos não estão familiarizados com a elaboração de um plano ou de uma estratégia para serem eles mesmos a definirem que “caminho” devem fazer, isto é, a tomarem opções.

Em alguns casos, tive de salientar a importância de perceberem o que é pedido e que dados têm que obter primeiro para conseguirem chegar ao resultado. Outra dificuldade, foi exatamente, não ser possível obter a equação de uma das retas onde, maioritariamente, a primeira reação dos alunos é de frustração por não conseguirem responder por falta de conhecimento ou por terem alguns passos incorretos.

Durante o momento de discussão, um dos alunos foi ao quadro apresentar a equação da reta AD, aproveitei este momento para explicitar a fórmula do cálculo analítico do declive.

Outro aluno foi ao quadro resolver a equação da reta BC, reforçando o facto de essa reta ser paralela à anterior e, consequentemente, ter o mesmo valor do declive. A equação desta reta já suscitou mais dificuldades, pois não era apresentada na representação gráfica a interseção da reta com o eixo das ordenadas, sendo necessário a substituição na equação da reta de um outro ponto conhecido. Neste momento, fui eu em interação com a turma, que obtive o valor da ordenada na origem, explicando todos os passos que eram necessários e a razão para os efetuarmos.

A equação da reta DC também já não suscitou tantas dificuldades como a anterior pois é uma reta horizontal. Os alunos conseguiram concluir rapidamente que a reta AB é paralela à reta DC e, como tal, o valor do declive seria o mesmo, além de que se tratava de uma reta horizontal.

No final deste momento, voltei a reforçar a obtenção do valor da ordenada na origem a partir de um outro ponto conhecido da reta. Após este momento, os alunos retomaram o trabalho autónomo na resolução da questão 2 da tarefa.

Durante este momento, pude observar que a primeira alínea não suscitou grandes dificuldades na grande maioria dos alunos, mas constatei que os mesmos apenas apresentavam as retas sem justificarem as suas escolhas. Na segunda alínea já identifiquei mais dificuldades, principalmente pela falta de planeamento. Na verdade, os alunos vêm bastantes retas e equações de retas e não percebem qual o primeiro passo que devem fazer, resistindo na resolução e solicitando imediatamente ajuda. Esta situação prende-se com o facto de os alunos estarem habituados à resolução de exercícios de natureza mais fechada e cujo enunciado é mais objetivo.

Na discussão da questão 2 da tarefa iniciei a mesma com uma pequena explicação e enquadramento, questionando os alunos sobre como se consegue só pela representação gráfica saber se o declive é positivo, negativo ou nulo. Vários alunos responderam corretamente e, desta forma, tentei que os alunos que tiveram mais dificuldades na sua resolução, esclarecessem eventuais dúvidas que ainda poderiam existir. Os alunos deram as respostas oralmente à primeira alínea e pedi sempre para os mesmos justificarem as suas escolhas.

Na segunda alínea da questão 2, pedi a um aluno que tinha respondido corretamente, para dizer como pensou e que estratégias utilizou. Tentei reforçar a importância do planeamento e de começarmos pelas retas que sabemos imediatamente como são as expressões, como por exemplo, pelo facto de apenas existir uma reta horizontal e uma reta que passa pela origem e assim sucessivamente. Após terem sido esclarecidas todas as dúvidas, os alunos retomaram o trabalho autónomo na resolução da questão 3 e 4.

A resolução da questão 3, suscitou algumas dificuldades na obtenção do valor da ordenada na origem. A maioria dos alunos conseguiu, através da aplicação da fórmula do cálculo analítico do declive, obter o valor do declive da reta pois a mesma era paralela à anterior, mas ainda não estavam suficientemente familiarizados com a obtenção do valor da ordenada na origem através de um ponto dado, pois apenas tinham sido confrontados com este processo no início desta aula. Os alunos que manifestaram mais dificuldades e pediram ajuda durante o momento de trabalho autónomo tentei que se lembrassem do que fizemos na resolução da questão 1 e como procedemos ao invés de apenas dizer como deveriam proceder.

Solicitei a uma aluna que fosse ao quadro resolver a questão 2 e, devido às dificuldades que os alunos tiveram na obtenção do valor da ordenada na origem, recorrendo à resolução da aluna, explicitei o procedimento e o facto de podermos utilizar o ponto dado, pois o mesmo pertencia à reta que queríamos obter. Fui questionando os alunos para perceber e conseguir esclarecer todas as dúvidas que ainda poderiam persistir, relacionando também com o que tínhamos feito na primeira questão.

A maioria dos alunos já não conseguiu finalizar a resolução da tarefa, sendo a mesma pedida para trabalho de casa. Como na aula seguinte, estavam previstas revisões para o teste, propus uma lista de exercícios opcionais para os alunos resolverem em casa e puderem preparar-se para o teste.

Na sua maioria, a aula decorreu normalmente e apesar de o plano de aula não ter sido totalmente cumprido, os objetivos para a mesma foram cumpridos, tendo os alunos conseguiram trabalhar alguns conceitos que ainda não estavam familiarizados.

3.6.10. Aula 10 – 27 de abril de 2016

Esta aula foi a última antes da ficha de avaliação, pelo que o objetivo para a mesma era resolver a última questão da tarefa iniciada na aula anterior e esclarecer eventuais dúvidas. Como a duração da aula era de 45 minutos e durante o período da tarde, os alunos normalmente encontram-se sempre mais agitados e cansados, tentei inicia-la o mais rapidamente para conseguir esclarecer o maior número de dúvidas e rever todos os conceitos necessários.

Iniciei imediatamente com a resolução da questão 3 da tarefa anterior, em interação com os alunos, e tentando fazer todos os passos necessários, explicitando claramente cada um deles e revendo, sempre que possível, noções importantes. Durante este momento, os alunos interagiram positivamente, respondendo a todas as questões que colocava e mostraram-se empenhados e atentos. Mais uma vez, reforcei a importância para os alunos de terem um sentido crítico, como por exemplo, quando calculam o valor do declive de uma reta, pela sua representação gráfica já sabem que o valor obtido será positivo, negativo ou nulo. Sendo assim, se o mesmo não acontecer, sabem imediatamente que calcularam incorretamente o mesmo e podem rever e alterar o que for necessário.

Após este momento, questionei os alunos sobre quais os exercícios que tinham dúvidas e infelizmente, a maioria dos alunos não trabalhou em casa e como tal, não tinha dúvidas. Apenas um aluno colocou uma questão num exercício do manual. Apesar da frustração que senti neste momento, tentei responsabilizá-los e incentivá-los a continuarem atentos e a praticarem em casa, após a aula.

Resolvi em discussão em grande grupo o exercício que um dos alunos propôs, conseguindo que toda a turma se envolvesse na resolução do mesmo. Após a resolução deste exercício, selecionei alguns exercícios de conteúdos de outros capítulos do manual que os alunos já não trabalhavam há algum tempo, no sentido de rever esses mesmo conteúdos.

A aula decorreu normalmente, tendo os alunos mostrado algum interesse e participaram ativamente na discussão de todos os exercícios propostos. Apesar desse facto, foi uma aula bastante frustrante para mim, enquanto professora, pois os alunos mostraram algum desinteresse e revelaram falta de empenho no estudo dos conteúdos, fora da sala de aula.

3.6.11. Aula 11– 28 de abril de 2016

Realização da ficha de avaliação sumativa (Anexo 3.1), pela turma, durante noventa minutos.

Capítulo 4
Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados

Neste capítulo irei descrever as opções metodológicas que tomei durante o estudo, a escolha dos participantes e as respetivas diligências que efetuei. Irei referir os métodos de recolha de dados que utilizei, explicitando detalhadamente cada um deles e concluindo este capítulo com os processos que utilizei para a análise de dados.

4.1.Opções metodológicas

Este estudo tem como objetivo central estudar a compreensão da noção de declive nas funções afim, linear e constante, pelos alunos, principalmente, em contexto de sala de aula, portanto optei por uma abordagem qualitativa seguindo um paradigma interpretativo. Fui simultaneamente professora e investigadora, de acordo com o que é referido por Ponte (2002): "um professor-investigador é um professor que realiza investigação, normalmente sobre a sua prática, mas também por vezes, sobre outros assuntos" (p.5).

Optei por este método de investigação, porque no estudo qualitativo o investigador procura obter dados descritivos a partir do contacto direto com o objeto de estudo, claramente seguindo um paradigma interpretativo, pois existe um envolvimento pessoal do investigador. Além disso, considero importante as interpretações que os alunos fazem das tarefas que proponho, pois a ação de um aluno é determinada pelo "conjunto de significados que ele elabora com base em todo o seu património conceptual e sistemas de conceções, relativos aos vários elementos da situação" (Guimarães, 2003, p. 20). Estando assim de acordo com certas características da investigação qualitativa apresentadas por Bogdan e Biklen (1994), nomeadamente: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural dos participantes, pois foi feita, principalmente, com os alunos no decorrer das aulas; (ii) é descritiva, na medida em que os dados incluem notas de campo, gravações áudio e vídeo e resoluções dos alunos; (iii) o investigador interessa-se sobretudo pelos processos, relegando para segundo plano os resultados ou produtos, por isso durante a análise dos dados estudei as suas resoluções e tentei interpretá-las independentemente do resultado final; (iv) a análise de dados foi feita indutivamente, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias; e (v) o significado que os participantes atribuem é de importância vital, na medida em que dará tanto mais qualidade à base que sustenta o próprio estudo e, por isso, recorri também à realização de entrevistas.

4.2.Participantes

Antes de dar início ao processo de recolha de dados, solicitei autorização por escrito à Direção da escola (Anexo 4.1), para a realização do estudo e para a gravação áudio e vídeo de algumas aulas. Posteriormente, comuniquei ao Diretor de Turma (Anexo 4.2) e à Coordenadora do Departamento de Matemática (Anexo 4.3). De seguida, explicitei os objetivos do estudo os procedimentos previstos aos alunos da turma e aos respetivos Encarregados de Educação, solicitando autorização escrita a estes últimos (Anexo 4.4), para a participação dos seus educandos no estudo e para a utilização dos procedimentos referidos. Garanti a liberdade de optarem ou não pela participação dos seus educandos no estudo, bem como a confidencialidade quanto à sua identidade, utilizando pseudónimos aquando da utilização das resoluções escritas elaboradas pelos mesmos ou transcrições retiradas das gravações áudio e/ou vídeo.

A seleção dos participantes foi bastante pensada devido ao seu grau de importância neste estudo. A turma do 8.º ano de escolaridade onde lecionei a subunidade "Gráficos de funções afins" tem bastantes dificuldades na disciplina de Matemática e na exposição das suas ideias e argumentações, sendo nestes aspetos uma turma bastante homogénea, o que dificultou bastante a minha escolha.

Apesar de ter recolhido os dados de todos os elementos da turma – 30 alunos – incidi a análise e interpretação dos dados em dois pares de alunos, pois não seria viável usar a turma toda, visto que seriam demasiados dados para interpretar em profundidade. A seleção dos alunos participantes teve em conta os seguintes fatores: terem interesse em participar no estudo, serem participativos durante os momentos de discussão na aula para conseguir aceder aos seus raciocínios e estarem disponíveis para a realização de uma entrevista.

O primeiro par é constituído pelo João e pela Joana, que, na altura em que decorreu o estudo, tinham 13 e 14 anos, respetivamente. O João é um aluno de nível 4 mas este ano letivo só atingiu este nível no terceiro período devido a se ter dispersado um pouco na turma e a se ter desinteressado em algumas disciplinas. Tem bastante potencial e é interessado na disciplina e bastante participativo. A Joana é uma aluna de nível 2, mas bastante esforçada, tanto que no último período conseguiu obter o nível 3. Tem bastantes dificuldades principalmente de bases devido algumas lacunas vindas de anos letivos anteriores, mas com o seu esforço e empenho tem vindo a superá-las.

O segundo par é constituído pela Beatriz e pela Benedita, sendo que a Beatriz tinha 13 anos e a Benedita 14 anos. As duas alunas deste par são bastante semelhantes quanto ao seu desempenho na Matemática e, sempre que possível, entreajudavam-se, mas ambas têm bastantes dificuldades na disciplina. São alunas de nível 2/3, mas empenharam-se bastante durante este ano letivo, realizando quase sempre os trabalhos de casa e dedicaram-se bastante nos momentos de trabalho autónomo. Estas alunas só no terceiro período começaram a ser mais participativas, dado serem bastante inseguras face à Matemática e só com o decorrer do ano é que conseguiram ganhar mais alguma confiança e começar a participar voluntariamente.

4.3.Métodos de recolha de dados

Numa investigação de carácter qualitativo é importante obter informações de diversas fontes e é frequente utilizar entrevistas e outras técnicas de recolha de dados (Bogdan & Biklen, 1994). Deste modo, para proceder à recolha de dados para o presente estudo, escolhi diferentes métodos: (a) observação, com recurso a registos em áudio e vídeo, (b) recolha documental e (c) entrevistas. A recolha de dados foi feita durante todo o período de realização do estudo, apesar de não ter recorrido à gravação vídeo em todas aulas.

4.3.1. Observação de aulas

A observação é um dos métodos de recolha de dados mais usados nas abordagens qualitativas (Bodgan & Biklen, 1994). Como observadora participante, é possível recolher informações sobre o tipo de participação e envolvimento dos alunos nas aulas, mas, pelo facto de realizar as gravações áudio e vídeo, permite-me posteriormente proceder a uma análise detalhada de todos os momentos da aula e ter acesso a esses dados sempre que necessário durante o trabalho de análise dos mesmos. Este fator é muito importante porque, além de assumir o papel como investigadora também era professora e, como tal, tive diversas vezes de privilegiar o papel de professora para desta forma conseguir que os alunos realizassem aprendizagens significativas.

Durante o desenvolvimento do estudo também pude contar com a colaboração da minha colega da prática de ensino supervisionada que registou todas as participações e interações que considerou fulcrais ou oportunas num dado momento. Esta ajuda, sem dúvida, foi uma mais valia em diversos aspetos. Também, elaborei notas de campo, isto é, “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (Bogdan & Bicklen, 1994, p.150). Tentei realizá-las logo após cada aula, onde tinha mais presente todos os aspetos da mesma. Estas notas de campo foram as mais descritivas possíveis, tentando fazer uma síntese de todos os momentos da aula, mas também contendo uma apreciação global e pessoal das aulas.

4.3.2. Recolha documental

A recolha documental neste estudo refere-se à recolha dos trabalhos produzidos pelos alunos durante a realização das tarefas, para deste modo, possibilitar uma análise posterior destes documentos, mas também a documentos fornecidos pelo diretor de turma tais como registos de avaliação e caracterização dos alunos da respetiva turma.

Neste estudo foram recolhidos e analisados os trabalhos produzidos pelos alunos (registos escritos na resolução das tarefas) e as informações registadas em áudio e vídeo das aulas (Bogdan & Biklen, 1994). De modo a que os alunos não ficassem intimidados com a presença do gravador e da câmara de filmar, na aula anterior ao início do estudo expliquei aos alunos que iria utilizar estes instrumentos, mas também a razão da sua utilização, enfatizando que não seriam utilizados para a sua avaliação sumativa. Na primeira aula do estudo utilizei os gravadores e apenas na terceira aula introduzi a câmara de filmar, para desta forma não causar tanto constrangimento os alunos. Pela mesma razão, a câmara de filmar foi colocada no fundo da sala, num local de pouco destaque.

Participei nas reuniões da turma, nomeadamente nos conselhos de turma e nas reuniões intercalares onde consegui reunir mais dados sobre os alunos e sobre a respetiva evolução dos mesmos. Desta forma, consegui ter uma melhor perceção da turma em todas as disciplinas ao invés de apenas na disciplina de Matemática.

4.3.3. Entrevistas

Sendo a entrevista um dos métodos mais utilizados para a recolha de informação em estudos de natureza qualitativa (Yin, 1994), planeei usá-la, pois, permite recolher de forma sistemática e compreensível os processos de raciocínio de cada um dos participantes. Este método permite "recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). No caso do meu estudo entrevistei dois pares de alunos, para tentar aceder aos seus raciocínios e perceber qual a compreensão da noção de declive na representação gráfica e na expressão algébrica de diversas funções. Desta forma, consegui questioná-los e compreender de forma mais detalhada alguns dos seus processos de raciocínio.

A entrevista do tipo clínico supõe uma interação entre o entrevistador e o entrevistado, usando um método de questionamento flexível com o objetivo de compreender a forma dos alunos pensaram. É elaborada uma tarefa específica apara os alunos que serão entrevistados e as questões vão evoluindo de acordo com o desempenho e as respostas dos alunos. Desta forma, consigo obter um conhecimento mais aprofundado sobre as estratégias e os procedimentos dos alunos e consigo ter uma visão mais profunda das suas experiências de aprendizagem. Para a realização da entrevista, terei em consideração diversos aspetos, tais como durante o decorrer da mesma certificar-me que os alunos se sintam confortáveis e num ambiente calmo, privilegiar o feedback positivo tentar entender tudo o que os alunos estão a pensar e interpretar corretamente o que expressam (Lahikainen, Kirmanen, Taimalu, 2003).

A entrevista foi realizada a dois pares de alunos (Par 1 – João e Joana e Par 2 – Beatriz e Benedita) após a lecionação da subunidade "gráficos de funções afins", seguindo um guião previamente estruturado. Os alunos trabalharam a pares na realização de uma tarefa proposta (Anexo 5.1), durante a realização da mesma fui questionando os pares e pedindo várias justificações de procedimentos. Mediante as respostas dos alunos fui colocando outras questões que achei pertinentes para o estudo. Como tal os dois pares na sua globalidade responderam às mesmas questões, ainda assim, houve algumas questões que foram colocadas a um par e não ao outro, dependendo da interação dos alunos.

A opção de realizar a entrevista também se baseou no facto de, antecipar que os dados recolhidos em aula poderiam ser insuficientes para responder às questões de investigação anteriormente mencionadas. Por isso, optei por uma entrevista de tipo clinico, onde consegui ter um maior controlo sobre a informação que recolhia. Devido às características destes alunos, foi importante ser um pouco mais informal pois desta forma consegui aceder melhor aos seus raciocínios, apesar das suas lacunas nas justificações matemáticas. Aquando a realização da entrevista, os alunos já mantinham uma relação de confiança o que facilitou a recolha dos dados.

4.4.Análise de dados

Neste estudo, a análise de dados realizada segue uma análise interpretativa, sendo que os dados serão analisados minuciosamente e utilizados para descrever, explorar e tirar conclusões acerca do caso em estudo. Como defendem Bogdan e Biklen (1994, p.205), analisar os dados consiste no

> processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou.

A análise incidirá sobre os documentos recolhidos e as transcrições dos registos áudio, vídeo e das entrevistas, tendo como objetivo responder às questões de investigação supramencionadas, principalmente à compreensão que os alunos revelam da noção de declive nas múltiplas representações, mas também para compreender se os alunos revelam evolução durante a subunidade da noção de declive nas diferentes funções. Esta constitui uma fase preliminar da análise de dados.

Como tal, organizei todos os dados recolhidos e tentei dividi-los por categorias mediante as questões de investigação – noção de declive e múltiplas representações. Nesta fase utilizei os documentos recolhidos de toda a turma, privilegiando os quatro alunos que tinha previamente selecionado e só depois os restantes elementos da turma.

Na noção de declive, tentei distinguir as produções escritas dos alunos pelos que manifestaram dificuldade e os que revelaram compreensão dessa noção. Nos que manifestaram dificuldade, tentei identificar que dificuldades os alunos apresentavam, por exemplo: exemplo: relação entre valor do declive e inclinação da reta, cálculo incorreto do declive – troca do valor da abcissa e do valor da ordenada, fórmula incorreta, entre outras.

Nas múltiplas representações tentei identificar quais as conversões que suscitavam menos dificuldades e quais originavam mais. Também, tentando perceber quais seriam as origens dessas dificuldades e a razão pelos alunos terem mais facilidade numas conversões do que noutras. Em cada representação tentei, sempre que possível identificar o tipo de erros que os alunos mais cometem e qual a representação que têm mais facilidade ou mais dificuldade em trabalhar.

Ao longo de toda a análise de dados identifiquei as capacidades transversais que os alunos têm mais dificuldade, como por exemplo, nas justificações escritas, na linguagem matemática e na notação utilizada.

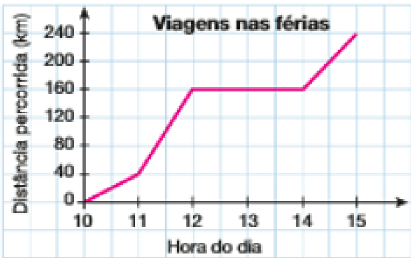
Capítulo 5
Análise de Dados

Neste capítulo apresentarei as resoluções de algumas questões de tarefas que foram realizadas durante a lecionação da subunidade Gráficos de Funções Afins, incidindo a análise especificamente em quatro alunos – João, Joana, Beatriz e Benedita – e, posteriormente, nos restantes alunos da turma. Sempre que as resoluções das questões não eram totalmente esclarecedoras tentei, tanto quanto possível, transcrever algumas passagens áudio e/ou vídeo de forma a partilhar o detalhe dos raciocínios e resoluções dos alunos às mesmas.

Em todas as questões termino com uma síntese, realçando desta forma os aspetos mais relevantes das mesmas.

5.1. Ficha de Trabalho N.º 1: "Funções" – Questão 2

2. Nas férias da Páscoa a Alice foi com a sua família passear de automóvel à Serra da Estrela. Saíram de manhã, mas só chegaram às 15h ao seu destino porque pararam pelo caminho para almoçar. O gráfico ao lado indica a distância percorrida pela família a partir do momento em que saíram de casa.



2.1. A que horas a família da Alice saiu de casa?

2.2. A que horas a família da Alice parou para almoçar?

2.3. Quanto tempo durou a paragem para o almoço? Explica a tua resposta.

2.4. Ao observares o gráfico, o que podes dizer sobre as duas primeiras horas de viagem da Alice? Explica a tua resposta.

2.5. Quanto tempo, após o início da viagem chegou a Alice à Serra da Estrela? Justifica a tua resposta.

2.6. Indica, justificando, que distância percorreu a Alice para chegar à Serra da Estrela?

Figura 4- Questão 2 da Ficha de Trabalho N.º 1

A ficha de trabalho n.º 1 (Anexo 1.2) tem como objetivo os alunos trabalharem especificamente a representação gráfica, analisando e interpretando a mesma. Esta ficha de trabalho foi a primeira da lecionação da subunidade "Gráficos de Funções Afins" e incide exclusivamente em conceitos trabalhos no 7.º ano de escolaridade para, desta forma, os alunos terem a oportunidade de rever esses mesmos conceitos e esclarecer eventuais dúvidas que ainda existam.

Os alunos na resolução desta ficha não necessitam de recorrer a cálculos analíticos, todas as alíneas são de resposta direta e os dados encontram-se exclusivamente na representação gráfica. Além deste facto, há a referir que as alíneas são independentes.

5.1.1. Questão 2.1

Todos os alunos da turma responderam corretamente a esta questão. As respostas variaram entre a mais completa (Figura 5) e entre aquela que apenas responde “10h” (Figura 6).

Os alunos revelaram que associaram corretamente que, se a família iria sair de casa, então teriam que fazer a leitura no ponto inicial da representação gráfica, podendo ainda haver alunos que associaram que, neste caso, iria corresponder a zero quilómetros percorridos e, portanto, a leitura no gráfico seria verificar qual a hora do dia que corresponde a zero quilómetros percorridos.

Figura 5 - Resposta do António à Questão 2.1 da Ficha de Trabalho N.º 1

Figura 6 - Resposta da Leonor à Questão 2.1 da Ficha de Trabalho N.º 1

5.1.2. Questão 2.2

Figura 7 - Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 1

O par 1 – João e Joana (Figura 8) respondeu que a paragem foi às 12 horas, mas a Beatriz do par 2 (Figura 9) respondeu o intervalo de tempo em que a família esteve parada. Também a Benedita do par 2 respondeu à semelhança do primeiro par.

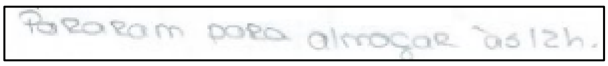


Figura 8 - Resposta da Joana à Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 1

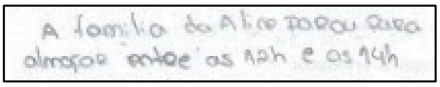

A família da Alice parou para almoçar entre as 12h e as 14h

Figura 9 - Resposta da Beatriz à Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 1

Vinte e três alunos da turma responderam que a paragem ocorreu às 12 horas, sendo três deles o João, a Joana e a Benedita. Os restantes sete alunos responderam incorretamente, sendo que seis destes alunos responderam com o intervalo de tempo em que a família do problema esteve parada, interpretando incorretamente o que era pedido nesta alínea. Apesar de estes alunos terem respondido com o intervalo de tempo que a família esteve parada, este erro pode ser de interpretação do enunciado, pois os alunos revelam que conseguem associar que esse segmento de reta horizontal representa a paragem da família, interpretando corretamente a paragem e também responderam corretamente às horas que se iniciou essa paragem.

O último aluno que também respondeu incorretamente respondeu que a família parou para almoçar às 15h, momento que corresponde ao final da viagem. O aluno pode ter associado a paragem da chegada ao destino com a paragem para o almoço, não interpretando que existe uma paragem às 12h. Por outro lado, também não interpreta corretamente o enunciado que afirma que a representação gráfica corresponde à viagem da família da Alice desde que saiu de casa até chegar à Serra da Estrela.

5.1.3. Questão 2.3

2.3. Quanto tempo durou a paragem para o almoço? Explica a tua resposta.

Figura 10 - Questão 2.3 da Ficha de Trabalho N.º 1

Dos vinte e oito alunos que responderam corretamente apenas sete apresentaram a respetiva justificação, ainda que sucinta. Do par 1 apenas a Joana apresentou a justificação (Figura 11) enquanto o João apenas indicou que a viagem “durou 2 horas”.

A Joana refere que “o gráfico manteve-se constante entre a hora e a distância percorrida” referindo-se ao segmento de reta horizontal, provavelmente relacionando com a função constante ou, com o facto, de nesse período de tempo, a distância percorrida manter-se inalterada.

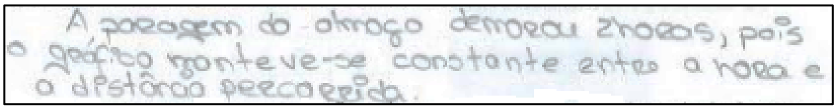

A paragem do almoço demorou 2horas, pois o gráfico manteve-se constante entre a hora e a distância percorrida.

Figura 11 - Resposta da Joana à Questão 2.3 da Ficha de Trabalho N.º 1

O par 2 – Beatriz e Benedita – apresentou as respetivas justificações (Figura 12 e 13). A Beatriz refere que a paragem está associada ao facto de "a linha mantem-se igual" onde é evidente que associa a um segmento de reta horizontal, provavelmente quer referir-se ao facto de o segmento de reta não estar "inclinado". Este facto também é sustentado pela resposta da colega que afirma que "a linha do gráfico parou nos 160 km", isto é, a distância percorrida manteve-se inalterada durante esse espaço de tempo.


Pararam para almoçar durante 2h por no gráfico a linha mantem-se igual

Figura 12 - Resposta da Beatriz à Questão 2.3 da Ficha de Trabalho N.º 1

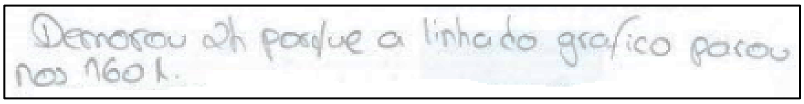

Demorou 2h porque a linha do gráfico parou nos 160 k.

Figura 13 - Resposta da Benedita à Questão 2.3 da Ficha de Trabalho N.º 1

Apenas dois alunos responderam incorretamente a esta alínea, sendo um deles o mesmo que respondeu incorretamente à alínea anterior. Em consonância com a resposta que deu na alínea anterior, este aluno afirma que a paragem durou 5 horas, sendo que 5 horas foi a duração total da viagem da família da Alice. Apesar de o aluno tentar interpretar o gráfico e retirar os dados do mesmo, parece centrar a sua atenção apenas no ponto de partida e de chegada, não interpretando o significado das alterações da monotonia e da inclinação dos segmentos de reta ao longo de toda a viagem.

O outro aluno que também respondeu incorretamente, afirma que a duração da paragem do almoço foi de 3 horas. Este aluno na alínea anterior respondeu que a família parou para almoçar das 12 horas às 14 horas, o que demonstra que este erro pode ter sido de distração e não tanto de dificuldades de interpretação gráfica.

Alguns alunos que também apresentaram justificação referiram que a distância é constante nesse período de tempo (Figura 14). Referindo-se ao facto de o segmento de reta apresentado ser horizontal, e provavelmente ao facto de a distância se manter inalterada nesse período de tempo.

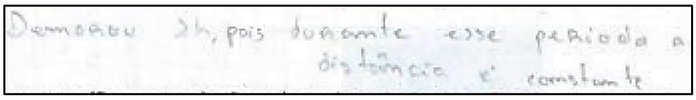

Demorou 2h, pois durante esse periodo a distância é constante

Figura 14 - Resposta do Lourenço à Questão 2.3 da Ficha de Trabalho N.º 1

5.1.4. Questão 2.4

2.4. Ao observares o gráfico, o que podes dizer sobre as duas primeiras horas de viagem da Alice? Explica a tua resposta.

Figura 15 - Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

Esta alínea é de natureza mais aberta, dado existirem inúmeras respostas admissíveis. Apenas dois alunos da turma não responderam a esta alínea, mas esses alunos também não responderam às restantes questões desta ficha.

O par 1 apresentou duas respostas distintas. O João analisa a distância que a família da Alice percorreu em cada hora e, em seguida, compara essas mesmas distâncias, indicando que no segundo segmento foi percorrido o triplo da distância relativamente ao primeiro, apresentando, por tanto, uma resolução numérica da questão (Figura 16). A Joana, no entanto, compara as duas primeiras horas da viagem da família da Alice com a distância total percorrida (Figura 17). Apesar de a linguagem matemática na justificação não estar correta subentende-se que quando a aluna menciona que o "gráfico subiu" para argumentar que nessas duas horas percorreram uma maior distância refere-se à inclinação superior dos segmentos de reta.

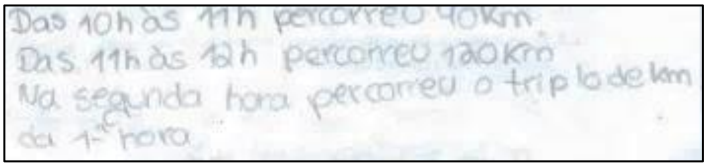

Das 10h às 11h percorreu 40Km
Das 11h às 12h percorreu 120Km
Na segunda hora percorreu o triplo de km da 1.ª hora

Figura 16 – Resposta do João à Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

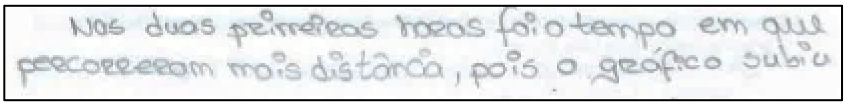

Nos duas peimeieas horas foi o tempo em que peecoreeeram mais distânca, pois o geáfico subiu

Figura 17 – Resposta da Joana à Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

A Beatriz apenas refere a distância percorrida na primeira hora da viagem da família da Alice (Figura 18), apresentando uma resposta muito incompleta. Já a Benedita (Figura 19) argumenta que na primeira hora uma menor distância do que na segunda hora, embora não apresente evidência de como chegou a essa conclusão.

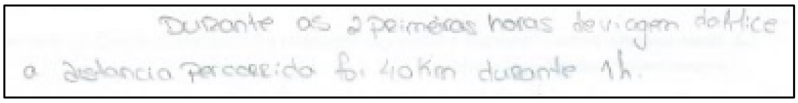


Figura 18 – Resposta da Beatriz à Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

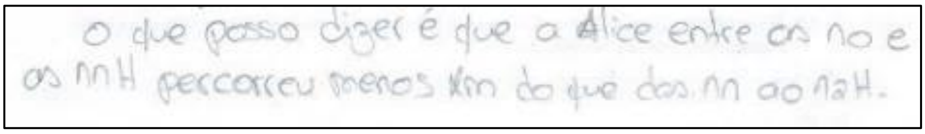


Figura 19 – Resposta da Benedita à Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

Os restantes alunos da turma, apresentaram justificações semelhantes às quatro anteriormente apresentadas. Um dos alunos da turma refere que a família pode ter apanhado trânsito na primeira hora (Figura 20), mas que na segunda hora "ia tudo bem", provavelmente relacionando com o facto de na segunda hora o segmento de reta estar mais inclinado do que o segmento de reta correspondente à primeira hora. Este aluno também começa por justificar a segunda hora e só depois a primeira hora, invertendo a linha temporal. Outro aluno refere a velocidade (Figura 21), sendo o único aluno da turma a mencionar este aspeto.

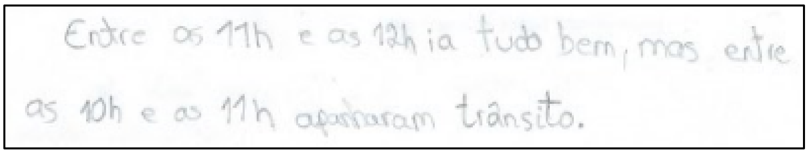


Figura 20 - Resposta do Rafael à Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

Figura 21 - Resposta do Jorge à Questão 2.4 da Ficha de Trabalho N.º 1

5.1.5. Questão 2.5

2.5. Quanto tempo, após o início da viagem chegou a Alice à Serra da Estrela? Justifica a tua resposta.

Figura 22 - Questão 2.5 da Ficha de Trabalho N.º 1

Dos vinte e um alunos da turma que responderem corretamente apenas quatro apresentaram a respetiva justificação. Do primeiro par apenas o João apresentou a justificação (Figura 23) e do segundo par quem apresentou a justificação foi a Beatriz (Figura 24).

A resposta do João é bastante peculiar pois ao invés de justificar com dados concretos retirados da análise da representação gráfica opta por justificar a razão pela qual a viagem demora as cinco horas. A Beatriz justificou que a viagem demorou cinco horas pois, a partir da representação gráfica, retirou que a viagem iniciou-se às 10h e terminou às 15h.

Demorou 5H pois parou 2H para almoçar como representa o gráfico e teve uma hora no trânsito.

Figura 23 - Resposta do João à Questão 2.5 da Ficha de Trabalho N.º 1

A Alice chegou após 5h. Porque no gráfico indica que começaram a viagem às 10h e acabaram a viagem às 15h.

Figura 24 - Resposta da Beatriz à Questão 2.5 da Ficha de Trabalho N.º 1

Os outros dois alunos que também justificaram esta alínea optaram por apresentar os cálculos 15-10=5h (Figura 25). Estes alunos subtraíram às horas a que a família da Alice chegou à Serra da Estrela, as horas a que saiu de casa, e desta forma calcularam a duração total da viagem.

Demorou 5 horas porque 15-10=5h

Figura 25 - Resposta do Lourenço à Questão 2.5 da Ficha de Trabalho N.º 1

Nesta questão quatro alunos não responderam, sendo que, como já referi, dois deles também não responderam à alínea anterior.

Outros cinco alunos responderam incorretamente a esta questão. Um dos alunos considerou que a viagem demorou 15 horas (Figura 26), confundindo a hora de chegada da família da Alice à Serra da Estrela com a duração da mesma e os restantes quatro alunos consideraram que a viagem demorou 6 horas (Figura 27), podendo ser um erro de leitura do gráfico.

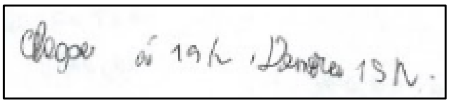


Figura 26 - Resposta do Mário à Questão 2.5 da Ficha de Trabalho N.º 1

Figura 27 - Resposta da Ana à Questão 2.5 da Ficha de Trabalho N.º 1

5.1.6. Questão 2.6


2.6. Indica, justificando, que distância percorreu a Alice para chegar à Serra da Estrela?

Figura 28 - Questão 2.6 da Ficha de Trabalho N.º 1

Cinco alunos não responderam a esta questão, sendo que quatro deles foram os mesmos que não responderam à questão anterior.

Os restantes vinte e cinco alunos da turma responderam corretamente, apesar de apenas dois deles terem apresentado a respetiva justificação. Nenhum dos elementos dos dois pares de alunos justificou esta alínea.

Um dos alunos que justificou esta questão optou por adicionar as distâncias percorridas na última hora e nas duas primeiras horas (Figura 29), obtendo assim a distância total percorrida pela família da Alice.

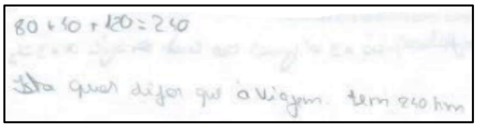


Figura 29 - Resposta do Frederico à Questão 2.6 da Ficha de Trabalho N.º 1

Um outro aluno que também justificou esta questão apenas refere que é a distância percorrida pela família desde de casa até chegar à Serra da Estrela (Figura 30), possivelmente por observação do ponto do gráfico correspondente ao momento de final da viagem. Esta resposta apesar de incompleta revela que o aluno conseguiu compreender bem as variáveis representadas no gráfico.

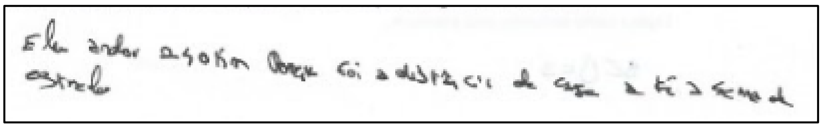

Ele andou 250km porque foi a distância de casa até à Serra da estrela

Figura 30 - Resposta do Luís à Questão 2.6 da Ficha de Trabalho N.º 1

5.1.7. Síntese

Na sua maioria, os alunos revelaram facilidade na interpretação e análise da representação gráfica respondendo corretamente à maioria das questões. Apenas surgiram algumas dificuldades a partir da questão 2.4, aumentando o número de respostas incorretas ou de alunos que não responderam.

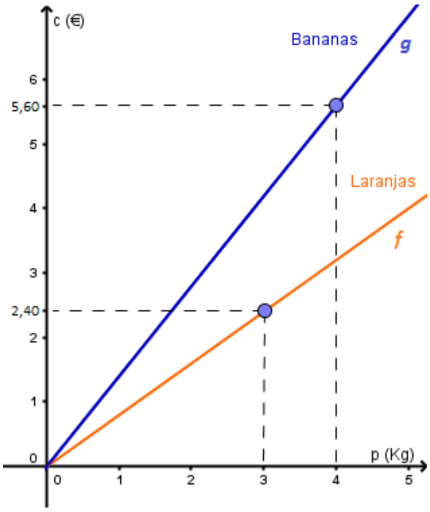
Apesar de esta questão não ter suscitado grandes dificuldades à maioria dos alunos nesta temática, estes revelam, no entanto, grandes dificuldades na comunicação matemática escrita. A maioria dos alunos nem tenta justificar as suas respostas, apresentando apenas as respostas. Mesmo os alunos que tentam justificar as respostas é notório a falta de vocabulário matemático.

A maioria dos alunos revelou que as suas dificuldades não estão diretamente relacionadas com as representações gráficas, apesar das dificuldades que foram detetadas aquando a realização da ficha diagnóstica.

Na verdade, os alunos, na sua maioria, associaram corretamente o segmento de reta horizontal com a paragem que a família da Alice fez, mas ainda não se encontram familiarizados com a influência da diferente inclinação dos três segmentos de reta que representavam a primeira, a segunda hora da viagem e a última hora da viagem e com a sua relação com o comportamento da função.

5.2. Ficha de Trabalho N.º 3: "Funções – Parte 3" – Questão 1

1. O Ricardo acompanhou o seu pai ao supermercado. No referencial ao lado estão representadas graficamente as funções f e g que relacionam, respetivamente, as quantidades p (em quilogramas), e os custos c (em euros), de laranjas e bananas que são vendidas nesse supermercado.



1.1. Quanto pagará um cliente que compre $3kg$ de laranjas e $4\ kg$ de bananas?

1.2. O Ricardo levou para casa $2kg$ de bananas e $1kg$ de laranjas. Indica, justificando, quanto pagou pela fruta.

1.3. Se o pai do Ricardo quisesse gastar 6 euros em laranjas, que quantidade (em quilogramas) de laranjas compraria? Justifica.

1.4. Determina, para cada uma das funções f e g a sua expressão algébrica. Explica como obtiveste cada uma das expressões.

1.5. **a)** Indica características comuns às duas funções f e g.

b) Indica o que distingue as duas funções f e g.

1.6. "As funções f e g são constantes". Indica, justificando, se esta afirmação é verdadeira ou falsa.

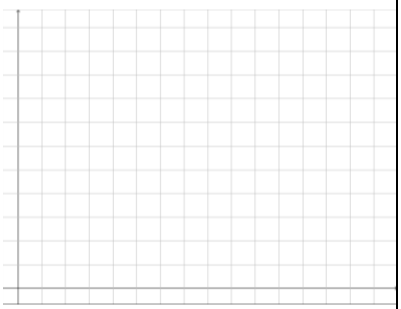
1.7. Este supermercado tem a opção de entrega ao domicílio. Este serviço tem um custo fixo de 2 euros, para além do preço dos produtos.

(a) Quanto pagará o pai do Ricardo se comprar $3kg$ de laranjas e optar pelo serviço de entrega ao domicílio? Justifica.

(b) Qual a diferença entre o valor que obtiveste na alínea anterior e o que o pai do Ricardo pagaria se não quisesse a entrega ao domicílio? Explica a tua resposta.

(c) Escreve a expressão algébrica que traduz a função j, que corresponde ao custo total do serviço de entrega e da quantidade (em quilogramas) de laranjas adquiridas pelo cliente.

1.8. Representa no referencial seguinte as funções f e j.



1.8.1. Que características comuns têm as representações gráficas das duas funções? Explica a tua resposta.

1.9. Indica, justificando, que relação existe entre as expressões algébricas das funções f e j.

Figura 31 - Questão 1 da Ficha de Trabalho N.º 3

A ficha de trabalho N.º 3 (Anexo 1.4) tem como principal objetivo introduzir a função afim dando início ao estudo dos conteúdos referentes ao 8.º ano de escolaridade.

É apresentada a representação gráfica de duas funções lineares e ao longo de seis alíneas os alunos trabalharão com as mesmas. Na sétima alínea é introduzida uma função afim ao acrescentar o custo fixo de uma entrega. Desta forma, os alunos trabalham com uma função afim que é translação da função linear anteriormente apresentada.

Aquando a realização desta ficha, três dos alunos da turma faltaram e um aluno não respondeu a nenhuma das questões, desta forma irei considerar a resolução de vinte e seis alunos e analisarei todas as alíneas desta questão.

5.2.1. Questão 1.1

Dos alunos que realizaram esta ficha de trabalho, dezanove responderam corretamente e seis responderam de forma incompleta, isto é, apresentaram o custo das laranjas e o custo das bananas separadamente.

A Joana do Par 1 apresentou uma resposta incompleta (Figura 32), mas contudo, interpreta corretamente o gráfico, sendo que este erro provavelmente deve-se a uma resposta precipitada. O seu par João respondeu corretamente a esta questão.

A Benedita do Par 2 respondeu corretamente a esta questão (Figura 33) assim como a sua colega Beatriz.

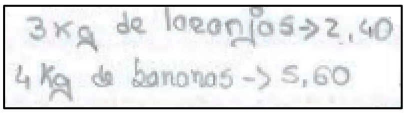


Figura 32 - Resposta da Joana à Questão 1.1 da Ficha de Trabalho N.º 3

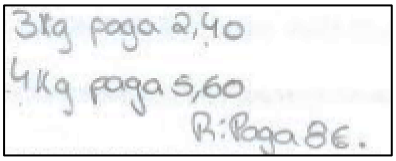


Figura 33 - Resposta da Benedita à Questão 1.1 da Ficha de Trabalho N.º 3

Um dos alunos da turma respondeu incorretamente (Figura 34) porque o aluno confundiu as bananas com as laranjas, apesar de todos os cálculos que apresentou se encontrarem corretos. Calculou em primeiro lugar o custo por quilo de cada uma das frutas e, em seguida, determinou o custo de quatro quilos de laranjas e de três quilos de bananas. Apesar deste erro é evidente os conhecimentos do aluno quanto à proporcionalidade direta, acrescendo até o grau de dificuldade dos valores com que este trabalhou.

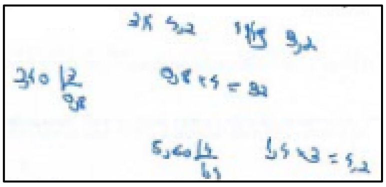


Figura 34 - Resposta do Luís à Questão 1.1 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.2. Questão 1.2

1.2. O Ricardo levou para casa $2kg$ de bananas e $1kg$ de laranjas. Indica, justificando, quanto pagou pela fruta.

Figura 35 - Questão 1.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

A grande maioria dos alunos da turma respondeu corretamente a esta questão (23 alunos). O João do par 1 optou por utilizar uma regra de três simples (Figura 36) para obter o custo de 1kg de laranjas e de 2kg de bananas, adicionando posteriormente os valores obtidos para conseguir o custo total da fruta.

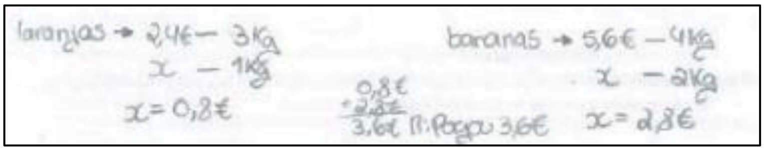


Figura 36 - Resposta do João à Questão 1.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

A Joana do par 1 apresentou o custo de 4kg de bananas e de 3 kg de laranjas obtido na alínea anterior e a partir desses valores obteve o custo de 2kg de bananas e de 1kg de laranjas (Figura 37), como não apresenta que cálculo fez para obter esses valores, a aluna deve ter recorrido à calculadora para dividir por dois e por três, respetivamente. Apesar de a resposta estar totalmente correta, na representação gráfica na sua ficha de trabalho encontram-se diversas linhas de apoio (Figura 38), o que revela que inicialmente a Joana tentou a partir da representação gráfica obter os valores pedidos. Provavelmente abandonou essa estratégia porque os valores do custo obtidos não eram valores certos, o que dificultou essa leitura.

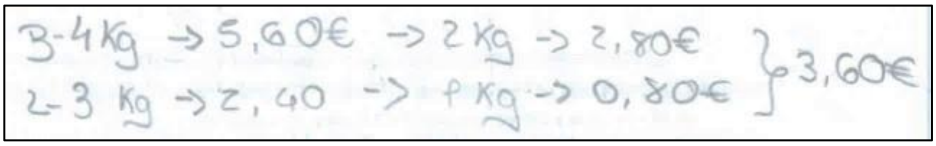


Figura 37 - Resposta da Joana à Questão 1.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

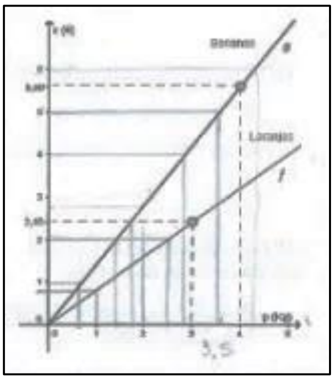


Figura 38 - Representação gráfica da Joana da Questão 1 da Ficha de Trabalho N.º 3

O par 2 optou por dividir por dois o custo de 4kg de bananas e por três o custo de 3kg de laranjas (Figura 39), obtendo desta forma o pretendido. Apesar de terem calculado corretamente o valor desejado é evidente na resolução da Beatriz a falta de rigor matemático na escrita, ao apresentar o valor dos 4kg de bananas e divide por dois, sem apresentar o significado dessa divisão, desta forma a aluna apresenta que o custo de 4kg de bananas é 3,60€ e o custo de 3kg de laranjas é 0,80€, o que está incorreto. Apesar de o seu raciocínio estar correto e a resposta final, também.

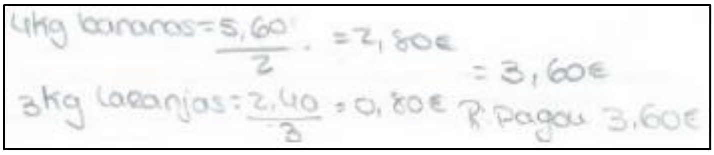


Figura 39 - Resposta da Beatriz à Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

Apenas um dos alunos respondeu incorretamente a esta questão (Figura 40), este aluno foi o que também respondeu incorretamente à questão anterior. Este aluno não apresenta quaisquer cálculos para responder a esta questão, supondo que tenha recorrido aos cálculos da alínea anterior para obter este valor.

Figura 40 - Resposta do Luís à Questão 1.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

Dois alunos responderam de forma incompleta a esta questão. Um dos alunos apenas não apresentou o valor total gasto pelo Ricardo, embora tenha obtido o valor dos 2kg de bananas e de 1 kg de laranjas (Figura 41). Este aluno, ao invés de calcular o custo por quilo de cada fruta, como o objetivo era calcular o custo de 2kg de bananas, mas era dado o custo de 4kg de bananas, apenas calculou a metade desse valor minimizando o número de passos necessários para a resolução desta questão e mostrando facilidade no raciocínio matemático.

Figura 41 - Resposta do Duarte à Questão 1.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

O outro aluno que respondeu de forma incompleta a esta questão, apenas calculou o custo por quilo de cada uma das frutas (Figura 42). Apesar de não ter finalizado a questão, consegue retirar os dados necessários da representação gráfica.

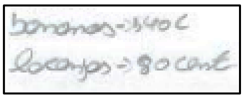


Figura 42 - Resposta do Tiago à Questão 1.2 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.3. Questão 1.3

1.3. Se o pai do Ricardo quisesse gastar 6 euros em laranjas, que quantidade (em quilogramas) de laranjas compraria? Justifica.

Figura 43 - Questão 1.3 da Ficha de Trabalho N.º 3

Apenas um aluno da turma não resolveu esta questão e dois responderam incorretamente. Desta forma vinte e três alunos responderam corretamente, sendo que a maioria optou pela mesma estratégia de resolução, dividiram a quantia que o pai do Ricardo queria gastar em laranjas pelo preço por quilo das mesmas. Os dois pares também optaram por esta estratégia de resolução (Figura 44 e 45).

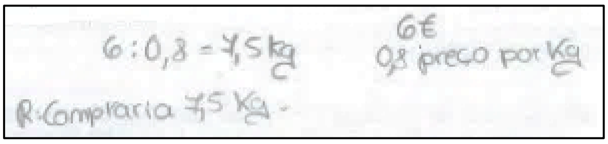


Figura 44 - Resposta do João (Par 1) à Questão 1.3 da Ficha de Trabalho N.º 3

No entanto o par 2 inicialmente tentou uma estratégia diferente (Figura 45). Como já era conhecido o preço por quilo das laranjas, foi duplicando esse valor para tentar descobrir quando iria gastar 6€. Desta forma, obteve o preço de 4kg e de 8kg, como o preço de 8kg de laranjas já ultrapassava os 6€, foram calcular o preço de 6kg, mas desta vez obtiveram um valor bastante mais baixo do que os 6€ pretendidos. Só após esta estratégia não ter resultado como pretendiam é que recorreram ao quociente entre os 6€ e o custo por quilo.

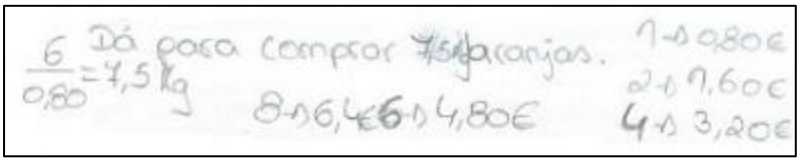


Figura 45 - Resposta da Beatriz (Par 2) à Questão 1.3 da Ficha de Trabalho N.º 3

Um dos alunos que respondeu incorretamente, começou por realizar corretamente a divisão entre os 6€ e o preço por quilo das laranjas (Figura 46), no entanto riscou a sua resposta e dividiu os 7,5kg novamente pelo preço por quilo, obtendo aproximado às unidades o valor de 9kg de laranjas.

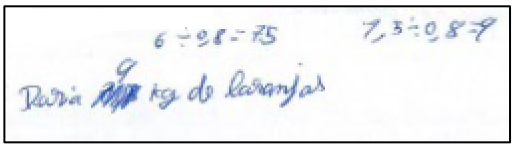


Figura 46 - Resposta do Duarte à Questão 1.3 da Ficha de Trabalho N.º 3

A outra aluna que respondeu incorretamente, afirma que retirou a sua resposta da representação gráfica (Figura 47). A aluna traça linhas de apoio no gráfico e rodeia o valor de 6€ (eixo das ordenadas) mas só traça essa linha até à semirreta que representa as bananas. Este erro pode ter sido uma distração, pois quando traça as linhas de apoio a primeira semirreta que encontra é a referente ao custo por quilo das bananas. Para traçar uma linha até à semirreta referente ao custo por quilo das laranjas teria de prolongar a mesma.

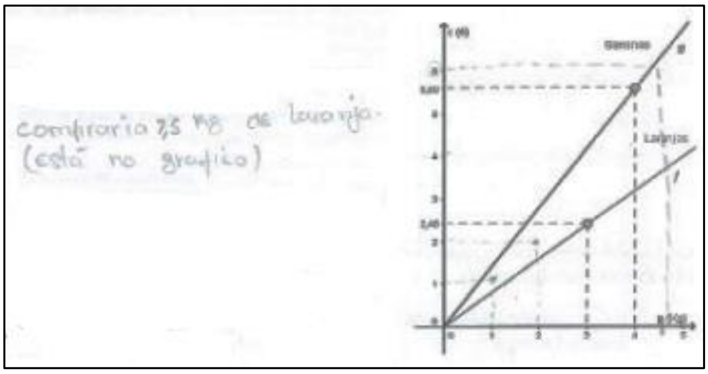


Figura 47 - Resposta da Isabel à Questão 1.3 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.4. Questão 1.4

1.4. Determina, para cada uma das funções f e g a sua expressão algébrica. Explica como obtiveste cada uma das expressões.

Figura 48 - Questão 1.4 da Ficha de Trabalho N.º 3

Esta alínea já suscitou mais dificuldades do que as anteriores, pois apenas dezoito alunos conseguiram responder corretamente a esta questão. Um dos alunos não respondeu a esta alínea, mas respondeu às seguintes alíneas, o que pode ser um indicador de dificuldades acrescida na conversão da representação gráfica para a respetiva expressão algébrica.

Dos dois alunos que apresentaram uma resposta incompleta, um deles apenas apresentou a expressão algébrica da função *f(x)* e o outro aluno, que foi a Joana do par 1, não apresentou a variável da função *g(x)* (Figura 49) mas, como apresentou corretamente a expressão algébrica da função *f(x)*, subentende-se que foi um esquecimento. Além deste facto, é de salientar a notação inadequada utilizada na expressão algébrica da função *f(x)* onde escreve "*f(f)*".

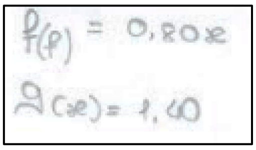


Figura 49 - Resposta da Joana à Questão 1.4 da Ficha de Trabalho N.º 3

No entanto o seu par, o João, respondeu corretamente a esta questão (Figura 50). Calculou o preço por quilo das bananas, que ainda não tinha calculado em nenhuma das alíneas anteriores, e apresentou com a notação adequada as duas expressões algébricas.

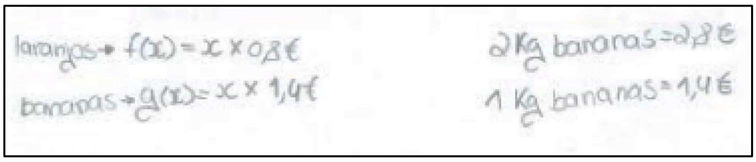


Figura 50 - Resposta do João à Questão 1.4 da Ficha de Trabalho N.º 3

O par 2 respondeu corretamente a esta questão apresentando a mesma resposta e utilizando a notação adequada (Figura 51). Este par já não necessitou de fazer quaisquer cálculos auxiliares pois já tinha calculado o preço por quilo das bananas e das laranjas em alíneas anteriores.

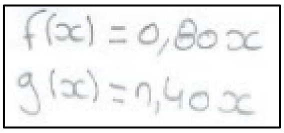


Figura 51 - Resposta da Benedita à Questão 1.4 da Ficha de Trabalho N.º 3

Dos restantes alunos, cinco responderam incorretamente e dois apresentaram uma resposta incompleta. Os cinco alunos que responderam incorretamente, cometeram todos o mesmo erro, esquecendo-se de colocar a variável na expressão algébrica (Figura 52).

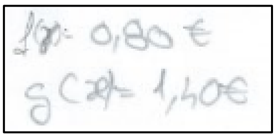


Figura 52 - Resposta da Leonor à Questão 1.4 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.5. Questão 1.5

1.5. **a)** Indica características comuns às duas funções f e g.

b) Indica o que distingue as duas funções f e g.

Figura 53 - Questão 1.5 da Ficha de Trabalho N.º 3

Esta questão está dividida em duas subalíneas. Na primeira subalínea existiram mais alunos a responder corretamente do que na segunda subalínea. Este facto pode suceder devido aos alunos terem trabalhado desde o ano letivo anterior as funções lineares, mas não estarem tão familiarizados com a noção intuitiva de declive.

Na primeira subalínea dois alunos não responderam e os restantes vinte e quatro apresentaram respostas adequadas. O par 1 (Figura 54) respondeu corretamente referindo que passam na origem, mas também que "ambas multiplicam pelo preço por quilo", esta afirmação pode ser devido à alínea anterior, onde determinaram a expressão algébrica de cada uma das funções, desta forma estão a referir-se ao valor do declive.

Ambas multiplicam pelo preço por Kilo
Passam na origem

Figura 54 - Resposta do João (Par 1) à Questão 1.5.a) da Ficha de Trabalho N.º 3

O par 2 apresenta duas respostas distintas, a Beatriz afirma que "são funções lineares" (Figura 55) enquanto a Benedita refere que "passam pelo O" (Figura 56), querendo referir que ambas as funções passam pela origem do referencial.

são funções Lineares.

Figura 55 - Resposta da Beatriz à Questão 1.5.a) da Ficha de Trabalho N.º 3

As 2 Passam pelo O.

Figura 56 - Resposta da Benedita à Questão 1.5.a) da Ficha de Trabalho N.º 3

Na questão 1.5.b) apenas responderam corretamente vinte alunos enquanto cinco não realizaram esta alínea e um aluno respondeu incorretamente.

O par 1 apresentou uma resposta adequada a esta questão: o João apenas refere que o que as distingue é “o preço por quilo”, mas a Joana complementa essa resposta com outras duas características (Figura 57). A resposta desta aluna encontra-se bastante completa pois, além de referir que a constante de proporcionalidade é diferente, ainda reforça com a inclinação das funções.

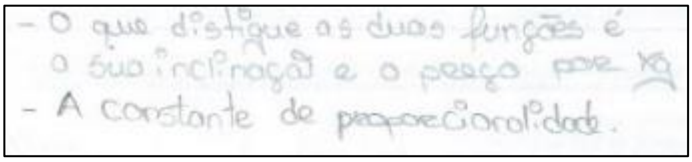

- O que distingue as duas funções é
a sua inclinação e o preço por kg
- A constante de proporcionalidade.

Figura 57 - Resposta da Joana à Questão 1.5.b) da Ficha de Trabalho N.º 3

A Benedita não responde a esta questão, mas a Beatriz responde corretamente (Figura 58) e, à semelhança da Joana do outro par, refere também que o que as distingue é “a constante de proporcionalidade direta e a sua inclinação”.


A constante proporcional direta,
a sua inclinação.

Figura 58 - Resposta da Beatriz à Questão 1.5.b) da Ficha de Trabalho N.º 3

O aluno que respondeu incorretamente afirmou que o que distingue as duas funções era a “distância” (Figura 59), provavelmente o aluno queria referir a inclinação das semirretas, isto é, a distância que as duas semirretas se encontram do eixo das abcissas.

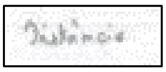

Distância

Figura 59 - Resposta do Jorge à Questão 1.5.b) da Ficha de Trabalho N.º 3

Outro aluno da turma apresentou uma resposta interessante e bastante pertinente (Figura 60). Este aluno refere que “é mais cara” referindo-se ao valor da constante de proporcionalidade de uma função ser superior ao da outra, pois neste caso o valor da constante de proporcionalidade está associado ao preço por quilo de cada fruta. O aluno refere, ainda, corretamente a influência que esse parâmetro tem na representação gráfica, aumentando a sua inclinação.

Uma é mais cara que a outra por isso tá mais inclinada que a outra.

Figura 60 - Resposta da Leonor à Questão 1.5.b) da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.6. Questão 1.6

1.6. "As funções f e g são constantes". Indica, justificando, se esta afirmação é verdadeira ou falsa.

Figura 61 - Questão 1.6 da Ficha de Trabalho N.º 3

Esta questão suscitou algumas dificuldades nos alunos, tendo em conta que apenas dezassete responderam corretamente e que mesmo desse grupo três não apresentaram qualquer justificação. Dos restantes nove alunos da turma, seis não responderam e três responderam incorretamente, sendo que um destes alunos foi a Benedita do par 2.

A Benedita refere que a afirmação é verdadeira (Figura 62) mas não chega a apresentar uma justificação. Como resolve as questões seguintes, é um indicativo que a omissão de justificação não foi por falta de tempo.

Sim, são constantes porque

Figura 62 - Resposta da Benedita à Questão 1.6 da Ficha de Trabalho N.º 3

O par 1 apresenta a mesma resposta (Figura 63), referindo corretamente que a afirmação é falsa, justificando com o facto de se tratar de funções lineares, o que evidencia que sabe distinguir estes dois tipos de funções (linear e constante). Este tipo de resposta demonstra uma compreensão sobre o tipo de funções existentes. A Beatriz do par 2 apresenta uma resposta correta (Figura 64), apesar de existir pouco rigor na linguagem matemática utilizada na justificação, pois a Beatriz refere que "não têm o mesmo valor", revelando conhecimento dos vários tipos de função, em particular da função constante.

Falsa, visto que é uma função linear

Figura 63 - Resposta do João à Questão 1.6 da Ficha de Trabalho N.º 3 é falsa porque não têm o mesmo valor.

Figura 64 - Resposta da Beatriz à Questão 1.6 da Ficha de Trabalho N.º 3

Os outros alunos que responderam incorretamente, um deles apenas responde "sim" e a outra aluna (Figura 65) apesar de corretamente referir que a afirmação é falsa, justifica contraditoriamente que "é uma função constante". Mais uma vez, esta aluna leva-me a concluir que ainda existem dificuldades nesta turma sobre o tipo de funções existentes e a distinção entre as mesmas, não só pelos três alunos que responderam incorretamente, mas também pela ausência de resposta de alguns alunos.

Falsa, porque é uma função constante

Figura 65 - Resposta da Ana à Questão 1.6 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.7. Questão 1.7

1.7. Este supermercado tem a opção de entrega ao domicílio. Este serviço tem um custo fixo de 2 euros, para além do preço dos produtos.

(a) Quanto pagará o pai do Ricardo se comprar $3kg$ de laranjas e optar pelo serviço de entrega ao domicílio? Justifica.

(b) Qual a diferença entre o valor que obtiveste na alínea anterior e o que o pai do Ricardo pagaria se não quisesse a entrega ao domicílio? Explica a tua resposta.

(c) Escreve a expressão algébrica que traduz a função j, que corresponde ao custo total do serviço de entrega e da quantidade (em quilogramas) de laranjas adquiridas pelo cliente.

Figura 66 - Questão 1.7 da Ficha de Trabalho N.º 3

A questão 1.7 é fulcral para o estudo da subunidade "Gráficos de Funções Afins" pois foi o primeiro momento no ano letivo onde os alunos são confrontados com as funções afins. Por essa mesma razão esta questão está dividida em três alíneas, sendo que as duas primeiras têm como objetivo introduzir o valor da ordenada na origem e apenas na última alínea os alunos escrevem a expressão algébrica de uma função afim.

Como era expectável a alínea que suscitou mais dificuldades foi a última. Nas duas primeiras alíneas vinte e dois alunos responderam corretamente e apenas quatro não responderam, sendo que estes quatro alunos não responderam a mais nenhuma questão da ficha de trabalho, o que possivelmente deveu-se à falta de tempo, pois estes, habitualmente, apresentam dificuldades na aula e necessitam de mais tempo para realizarem as questões.

O par 1 respondeu corretamente à alínea a) (Figura 67) apresentando o custo de 3kg de laranjas e a quantia total que o pai do Ricardo irá pagar, apresentando também os cálculos necessários. O par 2 respondeu à semelhança do primeiro par.

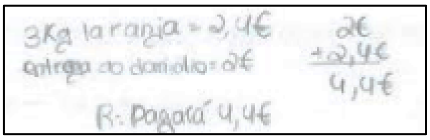


Figura 67 - Resposta do João (Par 1) à Questão 1.7.a) da Ficha de Trabalho N.º 3

Os dois pares também responderam corretamente à alínea b), referindo que a diferença seria de 2€ e justificando que é a quantia referente ao custo da entrega ao domicílio.

Como já referi, a alínea 1.7.c) foi a questão que suscitou mais dificuldades, pois apenas dezasseis alunos responderam corretamente. Nove alunos não responderam e um dos alunos respondeu incorretamente.

Os dois pares responderam corretamente e ambos apresentaram a mesma resposta (Figura 65). Depreendo que o realizarem corretamente as duas alíneas anteriores, facilitou-lhes a resposta a esta alínea.

Figura 68 - Resposta da Joana (Par 1) à Questão 1.7.c) da Ficha de Trabalho N.º 3

A aluna que respondeu incorretamente (Figura 69), ao invés de somar à expressão algébrica o valor da ordenada na origem referente ao custo do valor da entrega ao domicílio, multiplica esse valor, obtendo desta forma uma função linear. Esta aluna respondeu corretamente às alíneas anteriores, podendo-se depreender que tenha sido um erro de distração, pois ao invés de adicionar o custo fixo de 2€, multiplicou por esse valor.

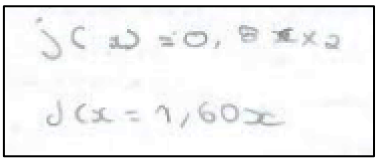
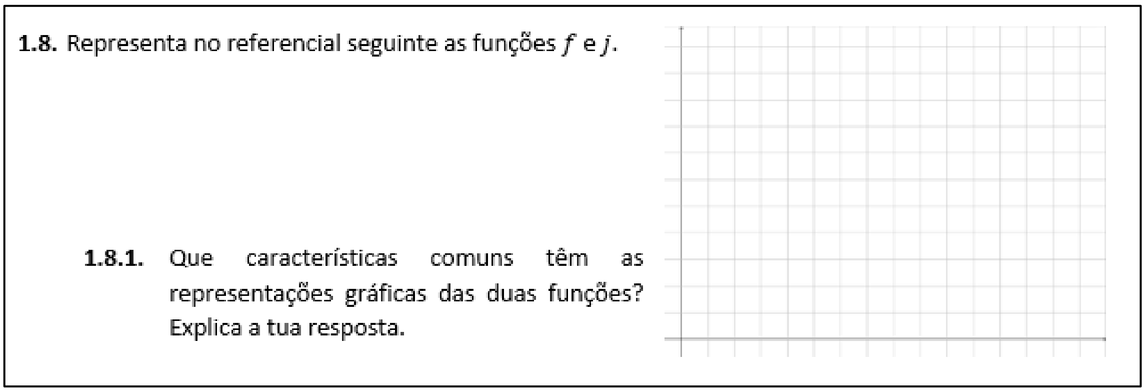


Figura 69 - Resposta da Vanessa à Questão 1.7.c) da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.8. Questão 1.8



1.8. Representa no referencial seguinte as funções f e j.

1.8.1. Que características comuns têm as representações gráficas das duas funções? Explica a tua resposta.

Figura 70 - Questão 1.8 da Ficha de Trabalho N.º 3

Esta alínea dá continuidade ao estudo iniciado na alínea anterior sobre as funções afins. Está dividida em duas subalíneas, onde o objetivo da primeira é auxiliar na resolução da segunda subalínea.

Quase metade da turma não realizou a questão 1.8 (doze alunos), o que demonstra as dificuldades que os alunos têm na conversão da expressão algébrica para a respetiva representação gráfica. Apenas quatro alunos responderam corretamente, cinco responderam incorretamente e cinco responderam incompleto.

O João do primeiro par respondeu de forma incompleta (Figura 71), apresenta a função $f(x)$ mas apenas calcula as imagens de *j(2)* e de *j(3)* e marca esses pontos no referencial, não traçando a semirreta correspondente, o que provavelmente deve-se a distração. A sua colega resolveu da mesma forma, mas já traçou a semirreta.

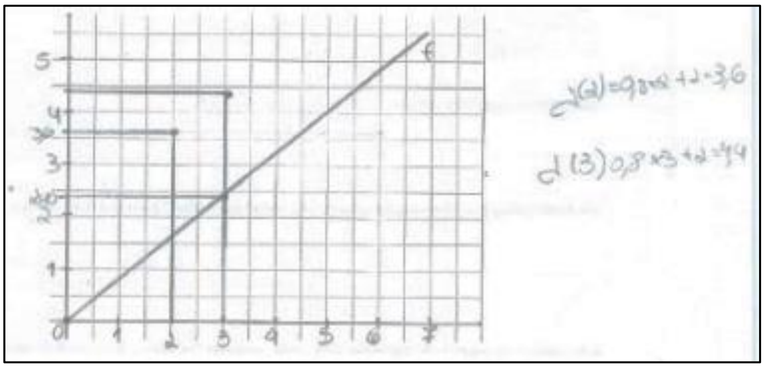


Figura 71 - Resposta do João à Questão 1.8.1 da Ficha de Trabalho N.º 3

O par 2 respondeu incorretamente a esta questão (Figura 72) e não apresentou quaisquer cálculos auxiliares. Consideraram o valor da ordenada na origem como sendo

2,4 ao invés de 2. Este erro pode dever-se a uma confusão entre os valores obtidos na questão 1.7.1, onde também era considerado o valor 2,4€ mas sendo este o custo de 3kg de laranjas e não o custo fixo da entrega ao domicílio. Os outros cinco alunos que responderam incorretamente a esta alínea, cometeram todos o mesmo erro que o par 2.

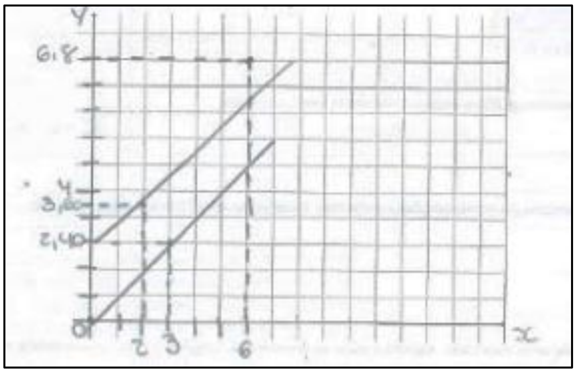


Figura 72 - Resposta da Beatriz (Par 2) à Questão 1.8 da Ficha de Trabalho N.º 3

Na questão 1.8.1 verificou-se novamente um elevado número de alunos que não realizaram esta subalínea (14 alunos). Esta circunstância deve-se ao facto de não terem realizado a questão 1.8, o que impossibilita a resposta a esta subalínea. A Benedita do par 2 foi uma das alunas que não realizou esta questão, apesar de no seu caso ter resolvido a questão 1.8.

Dez alunos responderam corretamente a esta questão, como foi o caso do par 1 (Figura 73) e da Beatriz do par 2. Todos os alunos que responderam corretamente deram a mesma resposta, como seria expectável pois apenas se poderiam basear na representação gráfica que fizeram na questão 1.8.

Figura 73 - Resposta do João (Par 1) à Questão 1.8.1 da Ficha de Trabalho N.º 3

Dois alunos responderam incorretamente a esta questão, tendo um dos alunos referido que a característica comum são os "kg de laranjas" (Figura 74). Este aluno responde desta forma, devido a serem consideradas em outras alíneas os quilos de bananas, não interpretando corretamente o enunciado desta questão que dizia respeito à representação gráfica.

6 kg de laranjas

Figura 74 - Resposta do Duarte à Questão 1.8.1 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.9. Questão 1.9

1.9. Indica, justificando, que relação existe entre as expressões algébricas das funções f e j.

Figura 75 - Questão 1.9 da Ficha de Trabalho N.º 3

À semelhança das alíneas anteriores, a maioria dos alunos não respondeu a esta questão (16 alunos), sendo novamente a Benedita do par 2 uma das alunas. Os restantes dez alunos da turma responderam corretamente a esta questão.

O par 1 (Figura 76) refere corretamente que a constante de proporcionalidade é igual nas duas funções, associando-a ao coeficiente de x e, também refere que são paralelas, não estabelecendo qualquer relação entre estas duas características. A Beatriz do par 2 responde de forma semelhante a este par, assim como os outros alunos que responderam corretamente.

O que contém igual é a constante de proporcio-
nalidade (ou coeficiente de x)
São paralelas

Figura 76 - Resposta da Joana (Par 1) à Questão 1.9 da Ficha de Trabalho N.º 3

5.2.10. Síntese

Esta questão está estruturada de forma ao grau de dificuldade ir aumentando gradualmente. Por essa mesma razão, é notório que o número de alunos que não responde, ou responde incorretamente, começa a aumentar a partir da quarta alínea.

Os alunos revelam algumas dificuldades na conversão da representação gráfica para a respetiva expressão algébrica, mas essas dificuldades aumentam quando a conversão pedida é a da expressão algébrica para a representação gráfica. Este facto prende-se com a dificuldade em obter pontos que pertencem à função, mas também na construção da representação gráfica e na respetiva marcação de pontos no referencial. A maioria dos alunos, dado um objeto de uma função, consegue calcular a respetiva imagem, mas quando têm que converter de uma expressão algébrica para a respetiva representação gráfica, têm dificuldade em planear uma estratégia que os auxilie.

Os alunos que têm dificuldades tendem a não tentar responder e, por essa mesma razão, existe sempre um número elevado de alunos que não apresenta sequer uma tentativa de resolução.

Ao longo de todas as alíneas os alunos, revelaram novamente, uma grande dificuldade nas justificações matemáticas. Os alunos que apresentam justificações, não expõem as notações matemáticas adequadas e, apesar de ser notório que estes possuem alguns conhecimentos, não os conseguem desenvolver.

A maioria dos alunos que finalizou a resolução desta questão, por ser introduzido a função afim a partir da função linear, percebeu que ao introduzir um custo fixo de 2€, a semirreta apresentada inicialmente desloca-se 2 unidades verticalmente e que essas duas semirretas serão sempre paralelas pois não se alterou o custo por quilo da fruta. Apesar de alguns alunos conseguirem concluir que essas semirretas são paralelas, a maioria não associa este facto ao valor da constante de proporcionalidade. A maioria ao descrever as características das duas semirretas, escreve que são paralelas e que têm o mesmo valor da constante de proporcionalidade, mas não concluem nenhuma relação entre estas duas características.

5.3. Tarefa: "Um Passeio de Bicicletas" – Questão 1

1. Um grupo de amigos combinou fazer um passeio de bicicletas. Como nem todos os elementos do grupo tinham bicicletas, foram informar-se do valor a pagar pelo aluguer de uma bicicleta em duas empresas.

- Na empresa M, o preço a pagar (em euros) em função do tempo (em horas) do aluguer da bicicleta é dado pela função $m(x) = 6x + 1$, e inclui 1 euro do aluguer obrigatório de um capacete.

- Na empresa P, observaram alguns valores que os clientes tinham pago e que incluíam 4 euros do aluguer obrigatório de um capacete:

Número de horas do aluguer	3	4	7
Custo do aluguer (em euros)	16	20	32

1.1. O grupo de amigos quer passear de bicicleta durante uma hora.
Na tua opinião, em que empresa será mais vantajoso fazer o aluguer das bicicletas para uma hora? Explica a tua resposta.

1.2. Um dos amigos afirmou: "É sempre mais vantajoso alugar as bicicletas na empresa M porque pagam menos pelo uso do capacete".
Concordas com esta afirmação? Justifica a tua resposta.

1.3. Em qual das empresas deve o grupo de amigos alugar a bicicleta? Explica a tua resposta.

Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

Figura 77 - Questão 1 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Esta tarefa (Anexo 1.6) é de natureza mais aberta do que as fichas de trabalho que usualmente os alunos estão habituados a trabalhar. Os alunos poderiam optar pelo uso do *software GeoGebra*, estando disponível um computador por par.

São apresentados os valores a pagar pelo aluguer de uma bicicleta em duas empresas. Na primeira empresa é apresentada uma expressão algébrica que relaciona o preço a pagar (em euros) em função do tempo (em horas) e na segunda empresa esses dados são apresentados na forma tabular. Desta forma os alunos são confrontados com diferentes representações de funções para darem resposta às questões colocadas.

Dois alunos faltaram a esta aula e não realizaram esta tarefa, logo considerarei a resolução de vinte e oito alunos.

5.3.1. Questão 1.1

Nesta questão cinco pares de alunos introduziram a expressão algébrica referente à empresa M e traçaram a reta a partir de dois pontos que eram apresentados na tabela da empresa P no *software GeoGebra*, mas aparentemente não utilizaram esses dados diretamente para dar resposta à questão. Dois alunos não realizaram esta questão, três responderam incorretamente e dois responderam de modo incompleto. Desta forma, vinte e um alunos responderam corretamente.

Os pares 1 e 2 responderam corretamente a esta questão. O par 1 (Figura 78) optou por calcular o custo de alugar a bicicleta durante uma hora na empresa M utilizando a sua expressão algébrica, enquanto na empresa P utilizou a forma tabular, tendo provavelmente verificado que a diferença entre alugar uma bicicleta durante três e quatro horas era de quatro euros. Portanto, como era dado o custo de alugar a bicicleta durante três horas, subtraíram quatro euros para obter o custo para alugar durante duas horas e subtraíram novamente a esse valor quatro euros para obter o custo de alugar a bicicleta durante uma hora. Desta forma, conseguiram apresentar o custo de alugar uma bicicleta durante uma, duas e três horas na forma tabular das duas empresas.

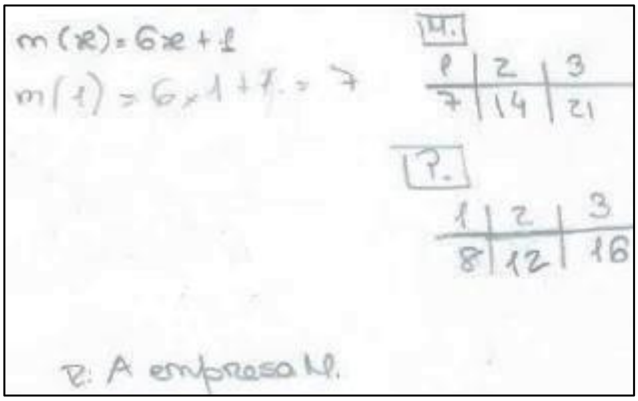


Figura 78 - Resposta da Joana (Par 1) à Questão 1.1 da tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

O par 2 (Figura 79) converteu os dados que se apresentavam na forma tabular da empresa P para a respetiva expressão algébrica e a partir da mesma calculou o custo de alugar uma bicicleta durante uma e duas horas, concluindo corretamente que a empresa mais vantajosa é a M.

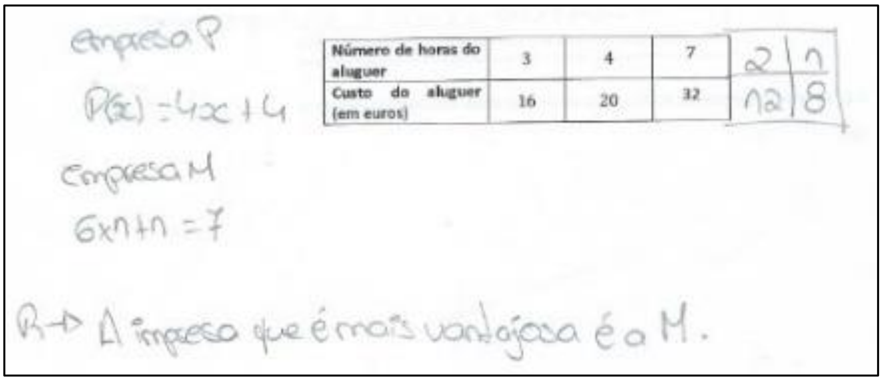


Figura 79 - Resposta da Benedita (Par 2) à Questão 1.1 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Os dois alunos que apresentaram a resposta incompleta apenas afirmaram que uma hora na empresa P seriam 8€, mas não apresentam o custo na empresa M nem concluíram em que empresa é mais vantajosa alugar a bicicleta durante uma hora.

Os três alunos que responderam incorretamente cometeram o mesmo erro (Figura 80). A partir da tabela retiraram que o custo de andar de bicicleta durante três horas seria de 16€, interpretaram corretamente que esse valor inclui o custo do aluguer do capacete e por isso retiraram esse valor, obtendo dessa forma que sem capacete o custo seria de 12€. Como esse valor seria para alugar a bicicleta durante três horas e eles apenas queriam o custo para uma hora, dividiram esse valor por três, obtendo que o custo para uma hora seria de 4€, mas esqueceram-se que esse valor não inclui o custo do capacete. Concluindo que seria mais vantajoso alugar na empresa P, pois o custo seria de 4€ ao invés de 8€.

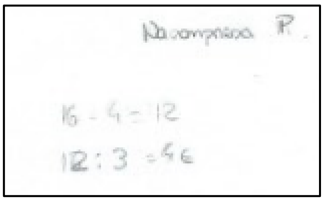


Figura 80 - Resposta da Leonor à Questão 1.1 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

5.3.2. Questão 1.2

1.2. Um dos amigos afirmou: "É sempre mais vantajoso alugar as bicicletas na empresa M porque pagam menos pelo uso do capacete".
Concordas com esta afirmação? Justifica a tua resposta.

Figura 81 - Questão 1.2 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Esta alínea já suscitou mais dificuldades que a anterior, provavelmente pela sua natureza mais aberta. Apenas quinze alunos responderam corretamente a esta questão, nove alunos responderam incorretamente, um aluno respondeu incompleto e dois não responderam.

Dos quinze alunos que responderam corretamente as respostas foram bastante semelhantes. Os alunos utilizaram os dados da alínea anterior, onde já tinham calculado o custo de alugar a bicicleta durante uma hora nas duas empresas, calcularam agora o custo de alugar durante duas horas nas duas empresas, concluindo que nesse caso seria a empresa P a mais vantajosa e que, por isso, não é a empresa M que é sempre mais vantajosa.

O par 1 respondeu corretamente a esta questão (Figura 82), e à semelhança dos outros alunos que também responderam corretamente, calcularam o custo de alugar uma bicicleta durante duas horas e concluíram que se andarem duas horas é mais vantajoso na empresa P, referindo em particular que é mais vantajoso se alugar durante "2h ou mais". O João, como se pode verificar na Figura 82, acrescentou posteriormente na sua justificação "ou mais", demonstrando desta forma que percebe que não é só vantajoso numa determinada hora mas que, a partir de um determinado momento, é sempre mais vantajoso na empresa P, apesar deste facto não conseguiram determinar o exato momento a partir do qual seria mais vantajoso. O uso do *software* GeoGebra teria sido uma mais valia para a determinação do ponto de interseção.

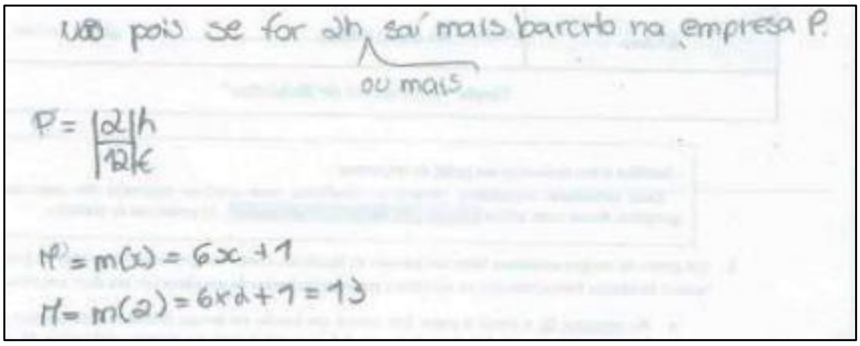


Figura 82 - Resposta do João à Questão 1.2 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

O par 2 respondeu incorretamente a esta questão. As duas alunas – Beatriz e Benedita – apresentaram justificações distintas, mas ambas afirmaram que concordam com a afirmação. A Beatriz (Figura 83), só considerou o custo de aluguer do capacete em cada empresa, concluindo desta forma que na empresa P seria 3€ mais caro. Assim, a aluna não considerou o custo por hora de aluguer da bicicleta, mostrando através desta resposta que tem algumas dificuldades na perceção da influência do custo fixo do aluguer do capacete (ordenada na origem) e da influência do custo por hora (declive) numa função. A Benedita (Figura 84) apresenta uma resposta semelhante à da sua colega, evidenciando as mesmas dificuldades.

Figura 83 - Resposta da Beatriz à Questão 1.2 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

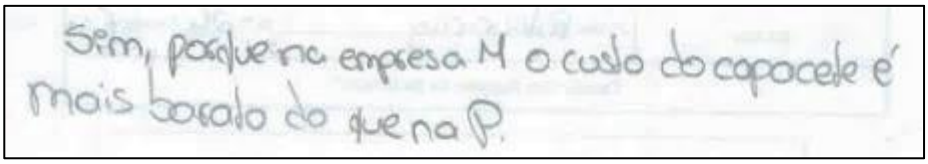


Figura 84 - Resposta da Benedita à Questão 1.2 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Dos alunos da turma que responderam incorretamente, existiram dois tipos de resposta: os que responderam de forma semelhante ao par 2 e os que consideraram apenas o custo por hora do aluguer da bicicleta. Como é evidente na figura 85, apesar de a aluna ter respondido que não concordava com a afirmação, refere que é sempre mais barato na empresa P, pois só considera o custo por hora. Este tipo de resposta também evidencia bastantes dificuldades nesta temática, pois os alunos apenas consideram o valor do declive e não o valor da ordenada na origem, não relacionando que ambas as empresas podem ser representadas por funções afins.

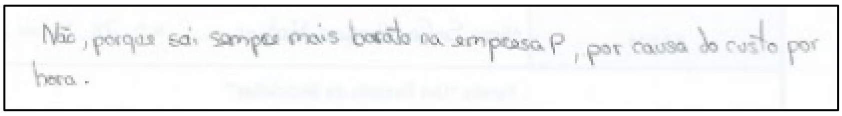

Não, porque sai sempre mais barato na empresa P, por causa do custo por hora.

Figura 85 - Resposta da Sara à Questão 1.2 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

5.3.3. Questão 1.3

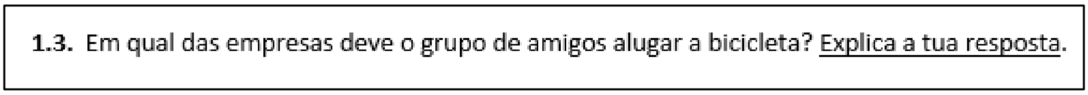

1.3. Em qual das empresas deve o grupo de amigos alugar a bicicleta? Explica a tua resposta.

Figura 86 - Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

De todas as alíneas esta foi a que suscitou mais dificuldades, sendo que apenas dez alunos responderam corretamente, o que perfaz apenas 35,7% dos alunos que realizaram esta tarefa. Nenhum destes alunos justificou a sua resposta, mas um dos pares recorreu ao GeoGebra e determinou corretamente o ponto de intersecção das duas retas no computador (Figura 87). Um dos elementos deste par apresentou uma resposta na sua folha (Figura 88) que evidencia uma boa compreensão da representação gráfica das duas funções em conexão com o que era pedido na questão. O outro elemento do par não apresentou resposta na folha de resolução.

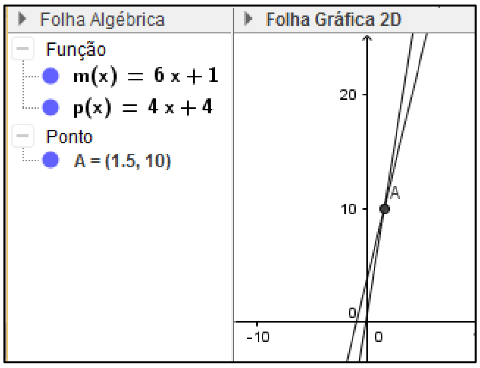
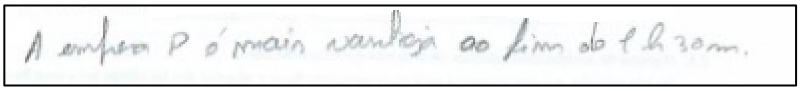


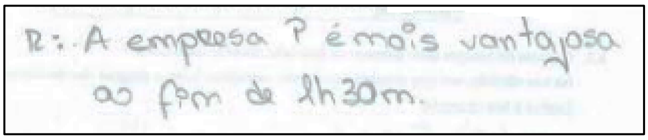
Figura 87 - Janela do GeoGebra do Tiago e do Miguel
referente à Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"



A empresa P é mais vantajosa ao fim de 1 h 30 m.

Figura 88 - Resposta do Miguel que recorreu ao GeoGebra
na Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

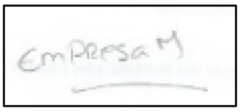
O par 1 respondeu corretamente a esta alínea (Figura 89), mas não apresentou qualquer justificação nem explicou como concluiu que era mais vantajoso alugar na empresa P ao fim de 1h30. O ficheiro do GeoGebra deste par não tem qualquer reta apresentada, apesar desse facto o par pode ter recorrido ao GeoGebra, mas depois ter apagado as retas e o respetivo ponto de interseção.



R: A empresa P é mais vantajosa
ao fim de 1h30m.

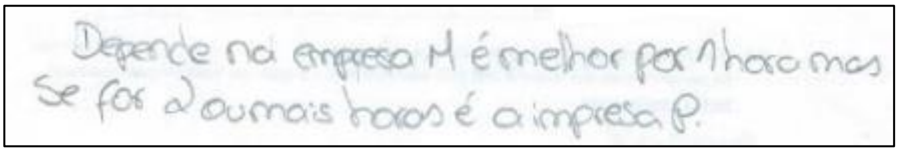
Figura 89 - Resposta da Joana (Par 1) à Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Os elementos do par 2 apresentaram respostas distintas, a Beatriz respondeu incorretamente e a Benedita apresentou uma resposta incompleta. A Beatriz apenas afirma que o grupo de amigos deve alugar as bicicletas na empresa M (Figura 90), não justifica a sua escolha e não tem em consideração o tempo de utilização das bicicletas. A Benedita já tem em consideração o tempo de utilização (Figura 91), mas só considera que o grupo de amigos aluga a bicicleta uma hora ou duas ou mais horas e não toma como hipótese alugarem, por exemplo, meia hora, talvez influenciada pelo facto de a tabela que surge na tarefa apenas apresentar valores naturais para a variável independente.



EmPResa M

Figura 90 - Resposta da Beatriz à Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"



Depende na empresa M é melhor por 1 hora mas
se for 2 ou mais horas é a impresa P.

Figura 91 - Resposta da Benedita à Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Um dos alunos da turma, que também apresenta uma resposta incorreta, omite qual a empresa mais vantajosa (Figura 92), provavelmente por esquecimento, além disso refere que é após 1h50 e não 1h30. Este erro deve-se ao facto de se estar a utilizar o sistema sexagesimal ao invés do sistema decimal. O aluno converte 1,5 horas para 1h50. Este aluno recorreu ao GeoGebra e traçou as duas retas, mas não calculou o seu ponto de interseção, no entanto, ao visualizar as retas consegue ter a perceção que a interseção se encontra entre a uma e as duas horas.

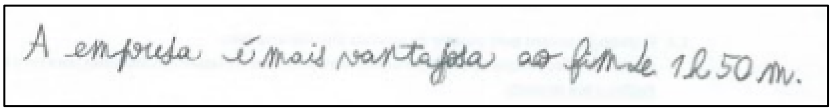

A empresa é mais vantajosa ao fim de 1h 50 m.

Figura 92 - Resposta do Paulo à Questão 1.3 da Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

5.3.4. Síntese

Devido às características, como já referi, desta tarefa, os alunos tiveram mais dificuldades na sua realização. Como já foi notório nas outras fichas de trabalho, os alunos manifestam bastantes dificuldades nas justificações devido à falta de prática na linguagem matemática escrita.

A maioria dos alunos respondeu corretamente à primeira alínea, provavelmente por tratar-se de uma questão mais direta. As dificuldades que surgiram nesta questão foram mais evidentes na forma tabular, muito provavelmente por estar descrita uma situação de uma função afim e os alunos habitualmente utilizarem esta forma de representação para funções de proporcionalidade direta.

As dificuldades que surgiram na segunda alínea prenderam-se maioritariamente com os parâmetros do declive e da ordenada na origem e como os mesmos influenciam a representação gráfica. Estas dificuldades aumentaram na última alínea, devido às mesmas razões do que na segunda alínea mas acrescentando o facto de ser uma resposta mais aberta e ser necessário uma perceção que a representação gráfica das duas funções se intersetam num determinado ponto, considerando ainda que, o valor do declive e da ordenada na origem ser diferente nas duas funções.

Alguns alunos, ao compararem as duas funções, apenas tomam em consideração um dos parâmetros, isto é, consideraram que uma empresa pode ser mais vantajosa do que outra considerando apenas o valor do custo por hora, desprezando o valor do custo fixo do capacete, ou a situação contrária.

Nesta tarefa, como são apresentadas duas representações distintas de funções, foi notório que os alunos têm mais dificuldade em trabalhar com a forma tabular do que com a expressão algébrica. Esta dificuldade também advém de se tratar de funções afins, pois alguns alunos trabalharam com a forma tabular como se se tratasse de uma situação de proporcionalidade direta.

A maioria dos alunos trabalhou diretamente com a expressão algébrica da empresa M, mas tentaram converter a representação tabular da empresa P para a respetiva expressão algébrica.

Nas duas últimas alíneas, os alunos que tiveram mais dificuldade foram os que não recorreram ao GeoGebra pois não visualizaram as respetivas representações gráficas. Apesar desta dificuldade, nenhum aluno tentou converter alguma das representações dadas de cada empresa para a respetiva representação gráfica.

5.4. Ficha de Trabalho N.º 4: "Gráficos de Funções Afins" – Questão 2

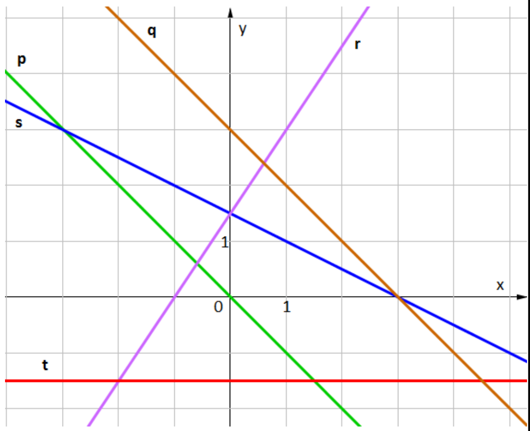
2. Observa as retas da figura e, sem efetuares cálculos, responde às questões seguintes.

2.1. Indica, justificando, a(s) reta(s) da figura que têm declive:

(a) positivo.

(b) negativo.

(c) nulo.



2.2. Sem efetuares cálculos, associa a cada uma das equações seguintes uma das retas p, q, r, s e t representadas no referencial acima.

(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta ___) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

Figura 93 – Questão 2 da Ficha de Trabalho N.º 4

A ficha de trabalho n.º 4 (Anexo 1.7) foi a última que os alunos trabalharam, em aula, nesta subunidade. A questão 2 desta ficha de trabalho (Figura 93) é composta por duas alíneas e tinha como objetivo que os alunos relacionassem o declive da reta com a respetiva inclinação, através da representação gráfica (alínea 2.1) e, posteriormente, associassem esta com a respetiva expressão algébrica (alínea 2.2). Em ambas as alíneas era referido que os alunos não deveriam efetuar cálculos, uma vez que não se pretendia a utilização da fórmula do cálculo analítico do declive ou a conversão da representação gráfica para a expressão algébrica pelos métodos analíticos habituais. Neste sentido, os alunos teriam de responder utilizando apenas os conhecimentos que possuem da noção de declive, tais como a relação que existe entre o valor do declive positivo, negativo ou nulo de uma reta e a respetiva inclinação.

Refira-se que apenas 28 alunos da turma realizaram esta ficha de trabalho por ausência de dois alunos.

5.4.1. Questão 2.1

Apenas um dos alunos não respondeu a esta questão e outro respondeu incorretamente. No entanto, dos vinte e seis alunos que responderam corretamente, apenas dois apresentam as respetivas justificações. Como podemos verificar (Figura 94), o João relaciona o valor do declive com o crescimento das retas. Apesar de a justificação não estar totalmente correta é evidente a sua compreensão da relação entre o valor do declive da reta (positivo, negativo ou nulo) e a monotonia das respetivas funções.

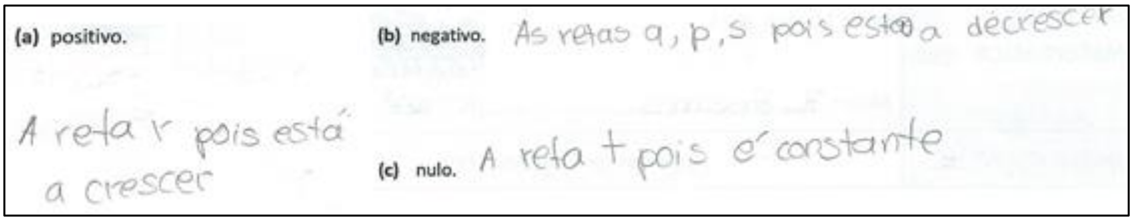
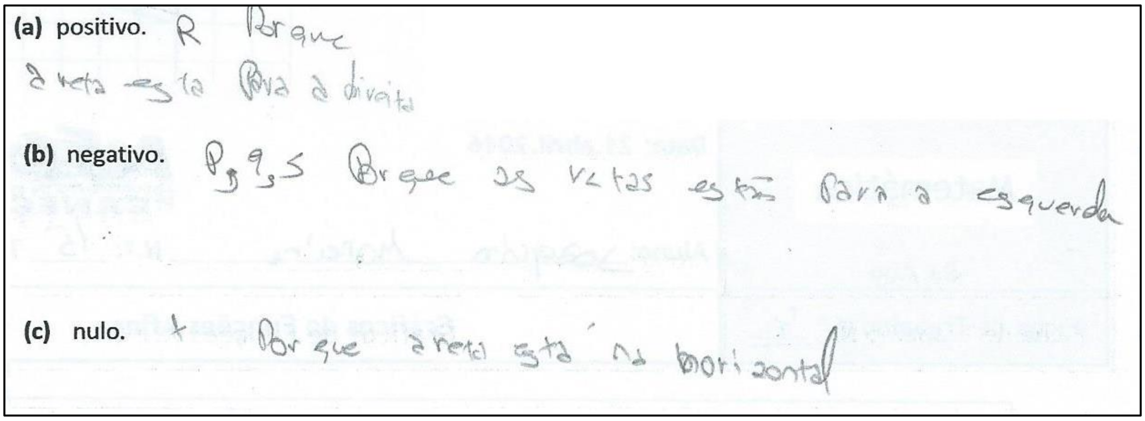

(a) positivo. A reta r pois está a crescer
(b) negativo. As retas q, p, s pois estão a decrescer
(c) nulo. A reta t pois é constante

Figura 94 - Resposta do João à Questão 2.1 da Ficha de Trabalho N.º 4

Apenas um outro aluno da turma, além do João, justificou corretamente esta questão, tal como se pode verificar na figura 95. Efetivamente, este aluno optou por justificar de acordo com o sentido que as retas tinham, associando, desta forma, que as retas que têm declive positivo "estão para a direita", as que têm declive negativo "estão para a esquerda" e a que tem declive nulo "está na horizontal". Esta justificação revela conhecimentos sobre a noção de declive e é de salientar, igualmente, que associa o valor de declive nulo a uma reta horizontal.

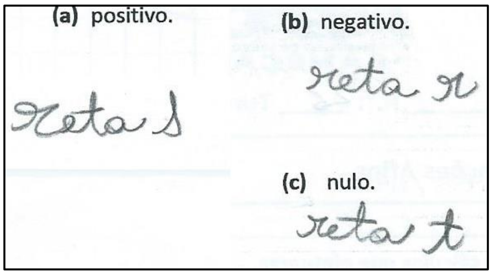

(a) positivo. R Porque a reta esta Pra a direita

(b) negativo. P, q, s Porque as retas estão Para a esquerda

(c) nulo. t Porque a reta está na horizontal

Figura 95 - Resposta do Luís à Questão 2.1 da Ficha de trabalho N.º 4

O aluno que respondeu incorretamente à alínea 2.1 (Figura 96) relativamente à identificação das retas que têm declive positivo e negativo, deixou a resposta incompleta pois não menciona as retas q e s, desta forma não é evidente a estratégia utilizada. Na verdade, mesmo que o aluno tenha confundido o valor do declive positivo com o valor negativo, deveria então ter colocado na alínea a) as retas p, q e s. No entanto, respondeu corretamente quanto à reta t, pois conseguiu associar que como é uma reta horizontal tem declive nulo.


(a) positivo. reta s

(b) negativo. reta r

(c) nulo. reta t

Figura 96 - Resposta do Paulo à Questão 2.1 da Ficha de Trabalho N.º 4

Apesar de a maioria da turma não ter justificado as suas respostas, como vimos apenas um aluno não conseguiu responder corretamente. A turma revela compreensão da relação entre o valor do declive e a monotonia das funções quando lhes é apresentada a respetiva representação gráfica.

5.4.2. Questão 2.2

2.2. Sem efetuares cálculos, associa a cada uma das equações seguintes uma das retas p, q, r, s e t representadas no referencial acima.

(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta ___) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

Figura 97 - Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 4

Na alínea 2.2 desta questão os alunos teriam de relacionar cada representação gráfica com a respetiva expressão algébrica, mas dado que eram apresentadas as cinco expressões algébricas era previsto que os alunos fizessem as associações tendo como base as respostas dadas na alínea anterior. Não era pedido justificação, mas para associarem corretamente as retas às respetivas equações teriam, como já referi, de mobilizar as respostas que deram na alínea anterior e entre as três retas que tinham declive negativo teriam de associar o correto valor da ordenada na origem. Uma das retas que tem declive negativo passa na origem do referencial, desta forma os alunos também poderiam utilizar esse dado.

Nesta questão os alunos apresentaram mais dificuldades do que na anterior, apesar de, na sua grande maioria, terem respondido corretamente. Dos vinte e oito alunos que realizaram esta ficha de trabalho, vinte e dois responderam corretamente às cinco alíneas, representando 78,6% dos alunos e dois não responderam a nenhuma das alíneas. Dois alunos responderam corretamente à alínea (D) e um outro aluno respondeu corretamente à alínea (C), mas não responderam a mais nenhuma das alíneas. Apenas um aluno respondeu incorretamente às alíneas (B), (D) e (E), no entanto, respondeu corretamente às alíneas (A) e (C).

O João, a Joana, a Beatriz e a Benedita responderam corretamente a esta questão (Figura 98).

(A) $y = -x$ (reta p) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta s) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta r)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta t) **(E)** $y = -x + 3$ (reta q)

Figura 98 - Resposta da Benedita à Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 4

Como já referi, dois dos três alunos que não responderam na íntegra a esta questão associaram a equação (D) à reta t (Figura 99). Pela resposta que apresentaram, pressupõe-se que estes alunos devem ter começado a fazer a associação das retas às respetivas equações que não lhes levantavam dúvidas, associando desta forma a única reta cujo valor do declive é nulo, mas não conseguiram associar as restantes quatro retas.

(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta t) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

Figura 99 - Resposta incompleta da Francisca à Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 4

A outra aluna que também não respondeu na totalidade à questão 2.2 (Figura 100) optou por associar a única reta que tem declive positivo. Esta escolha pode ter por base o facto de ser a única reta que tem declive positivo, apesar de também só existir uma reta com declive nulo. Esta aluna respondeu corretamente à alínea anterior, tendo conseguido distinguir quais as retas que têm valor de declive positivo, negativo ou nulo, desta forma uma das dificuldades que o aluno se pode ter deparado é como este parâmetro está apresentado na equação de uma reta. Isto é, uma possibilidade é a aluna não conseguir, dada a equação de uma reta, saber qual o valor do declive ou da ordenada na origem.

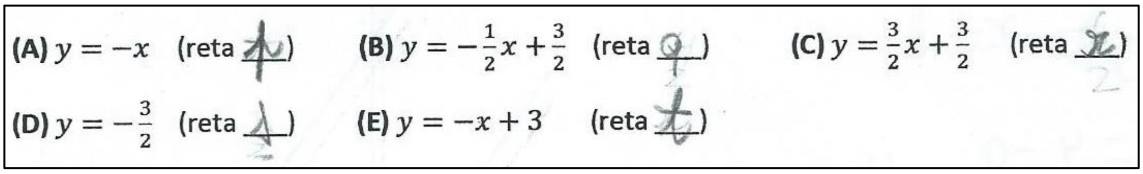
(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta π)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta ___) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

Figura 100 - Resposta incompleta da Teresa à Questão 2.2 da Ficha de Trabalho N.º 4

Estes três alunos aparentam ter tentado responder a todas as alíneas mas, como três das retas apresentavam declive negativo, não conseguiram através do valor da ordenada na origem fazer as respetivas associações. Frequentemente, estes alunos, devido às suas dificuldades, quando se defrontam com diversas hipóteses não conseguem arranjar uma estratégia de resolução. Apesar deste facto, demonstram uma atitude mais positiva face às questões porque revelam empenho na tentativa de concretização das questões colocadas.

O aluno que respondeu incorretamente (Figura 101), trocou as retas com valor de declive negativo e nulo e, apenas numa das três retas que tem valor de declive negativo, associou corretamente à sua equação. Esta circunstância pode depreender-se que foi pelo facto de ser a única reta com valor nulo na ordenada na origem, isto é, a única que passa na origem do referencial. Desta forma, apesar de o aluno demonstrar algumas dificuldades, revela conhecimentos sobre o tipo de funções, conseguindo distinguir as funções lineares das funções afins.


(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta ___) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

Figura 101 – Resposta incorreta do Paulo à Questão 2.2 da ficha de Trabalho N.º 4

5.4.3. Síntese

Os alunos não revelaram dificuldades na questão 2.1, apesar de não terem justificado as suas opções. O facto de os alunos não terem apresentado a respetiva justificação pode prender-se com a dificuldade de formulação de uma resposta adequada e não especificamente na temática que estão a trabalhar. Mesmo quando confrontados pela professora com o facto de não terem apresentado uma justificação, a maioria dos alunos responde que percebe a questão mas não sabe como responder.

A questão 2.2 já suscitou mais dificuldades nos alunos, apesar de na sua maioria terem conseguido responder corretamente. Estas dificuldades, na minha opinião, podem ser causadas pelo facto de serem apresentadas as equações das retas, pois os alunos ao longo da subunidade, manifestaram mais dificuldades quando tinham de trabalhar com as expressões algébricas do que nas outras formas de representação de uma função. Mas também pode ser por apareceram muitas equações para fazerem as correspondências com valores de declive negativos e os alunos não conseguirem entender a influência do valor da ordenada na origem ou na dificuldade de planearem uma estratégia para irem concretizando as respetivas associações.

Apesar das dificuldades reveladas pelos alunos, evidenciam compreensão da relação entre o valor do declive positivo, negativo ou nulo e a monotonia das funções quando lhes é apresentada a respetiva representação gráfica. Esta capacidade é fundamental, particularmente se os alunos conseguirem mobilizar estes conhecimentos para quando estão a trabalhar com funções.

5.5 Entrevista – Questão 1

1. O Sr. Martim usou um cronómetro e mediu a distância percorrida em 10 segundos pela Adriana que se deslocava a pé, pelo Alexandre que ia de automóvel e pela avó da Amélia que ia de autocarro.

1.1. Qual das pessoas percorreu uma maior distância ao fim de 6 segundos?

1.2. A cada linha do gráfico faz corresponder o nome de uma das quatro pessoas referidas acima e explica o teu raciocínio.

1.3. Qual o declive das retas A e C?

1.4. Comenta a seguinte afirmação: "O declive da reta B é inferior ao declive da reta A"

1.5. Qual a relação entre o declive e a distância percorrida?

1.6. No referencial apresentado no enunciado, esboça uma possível representação gráfica para o Rafael, que se deslocava de bicicleta. Explica o teu raciocínio.

Figura 102 - Questão 1 da Entrevista

Esta entrevista (Anexo 5.1) foi realizada por dois pares de alunos de modo a conseguir obter mais informações sobre o tipo de conhecimentos ou dificuldades que estes revelassem no final da subunidade lecionada.

Os pares que realizaram a entrevista são constituídos por: Par 1 – João e Joana e Par 2 – Beatriz e Benedita. Os dois elementos do par utilizaram folhas de resolução distintas, permitindo desta forma analisar as discussões do par, mas diversas vezes surgiram resoluções distintas dentro do mesmo par.

O objetivo desta primeira questão era analisar a compreensão revelada pelos alunos da noção de declive nas funções lineares e a relação entre o declive e a respetiva inclinação da reta.

5.5.1. Questão 1.1

Três dos alunos que realizaram a entrevista manifestaram bastantes dificuldades na interpretação gráfica. O par 2, durante o momento de discussão, concordou que o automóvel seria o meio de transporte mais rápido mas, na justificação escrita, um dos elementos do par referiu que o autocarro faz paragens tal como os dois elementos do primeiro par. Os alunos conseguiram relacionar cada uma das retas com o meio de transporte utilizado, mas consideram que a reta B tem de representar o autocarro e não o carro. Justificando ainda que o autocarro faz paragens (Figura 103 e 104) e, por esse motivo, para um mesmo período de tempo, percorrerá uma distância inferior ao carro. Estas argumentações parecem não atender ao facto de que se tivessem sido consideradas algumas paragens do autocarro, teriam de existir segmentos de retas horizontais na representação gráfica.

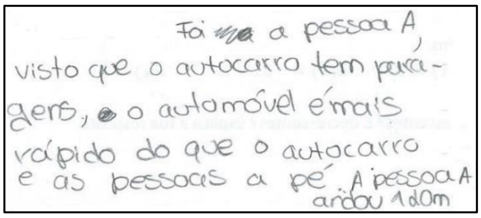

Foi a pessoa A, visto que o autocarro tem para-gens, o automóvel é mais rápido do que o autocarro e as pessoas a pé. A pessoa A andou 100m

Figura 103 - Resposta do João à Questão 1.1 da Entrevista

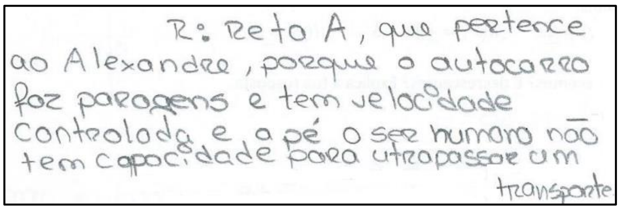

R: Reto A, que pertence ao Alexandre, porque o autocarro faz paragens e tem velocidade controlada e a pé o ser humano não tem capacidade para utrapassar um transporte

Figura 104 - Resposta da Joana à Questão 1.1 da Entrevista

5.5.2. Questão 1.2[1]

1.2. A cada linha do gráfico faz corresponder o nome de uma das quatro pessoas referidas acima e explica o teu raciocínio.

Figura 105 - Questão 1.2 da Entrevista

[1] A questão 1.2 apresenta uma gralha. Onde é referido “o nome de uma das quatro pessoas” deveria ler-se “o nome de uma das três pessoas”. Nenhum dos alunos que realizou a entrevista detetou o mesmo, desta forma não pode ser considerado um entrave à sua resolução.

Os dois pares associaram corretamente cada uma das linhas do gráfico ao nome de cada uma das pessoas mencionadas no enunciado, não tendo assim revelado dificuldades nessa associação. Salientando-se que as justificações utilizadas foram bastante semelhantes às da alínea anterior.

O João refere novamente as paragens que o autocarro faz durante o seu trajeto e justifica que a semirreta C está associada à Adriana pois "foi a que percorreu menos metros", enquanto que o seu par, a Joana, refere a relação entre o tempo e a distância (Figura 106).


R: Fiz estas opções porque rela-
cionei o tempo com a distância.

Figura 106 - Resposta da Joana à Questão 1.2 da Entrevista

A resposta da Joana evidencia assim uma boa leitura das variáveis apresentadas na representação gráfica e a correta interpretação da relação existente entre as mesmas.

O par 2 também justifica corretamente esta questão, tendo a Beatriz analisado a distância percorrida em 10 segundos (Figura 107) e a Benedita comparado as velocidades dos meios de transporte utilizados por cada uma das pessoas.

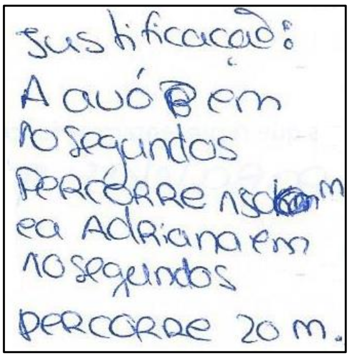

Justificação:
A avó em
10 segundos
percorre 150m
e a Adriana em
10 segundos
percorre 20 m.

Figura 107 - Resposta da Beatriz à Questão 1.2 da Entrevista

5.5.3. Questão 1.3

1.3. Qual o declive das retas A e C?

Figura 108 - Questão 1.3 da Entrevista

No cálculo do declive, os dois pares optam pelo cálculo analítico do declive apesar de se tratarem de funções lineares. Não relacionam o valor do declive na função linear com o quociente entre a imagem e o objeto de um ponto que pertença à função. Além deste facto, os quatro alunos não utilizam a notação adequada para os pontos e para o valor do declive (Figura 109), usando a letra da semirreta para identificar ambos os pontos com um travessão (Figura 109) ou com um sinal de igual (Figura 110). Em relação ao declive, nenhum dos pares o identifica ou apresenta a sua expressão geral, aplicando apenas o respetivo cálculo.

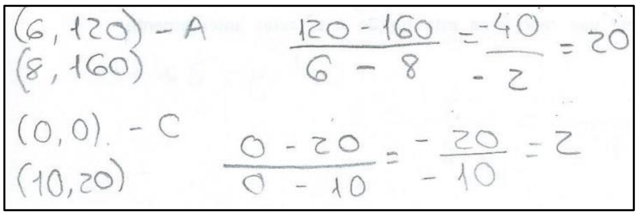


Figura 109 - Resposta da Joana à questão 1.3 da Entrevista

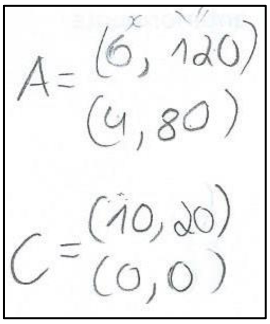


Figura 110 – Notação de pontos utilizada pelo João

Questionei o João e a Joana sobre a resolução desta alínea para, desta forma, tentar perceber se ambos associaram o valor do declive obtido com a inclinação da reta, tendo os alunos revelado conhecimento da noção de declive e sobre o tipo de funções envolvidas:

Professora Inês: Os valores que obtiveram para o declive são valores positivos. Ao olharem para o gráfico seria de esperar que fossem valores positivos?

João: Claro a reta está para a direita.

Professora Inês: Está para a direita ou…

João: Está a crescer!

…

Professora Inês: E seria também expetável que o declive de A tivesse um valor superior ao declive de C?

Joana: Sim!

Professora Inês: Porquê?

João: Esta está maior que esta. (Apontando para a representação gráfica)

…

Professora Inês: Como se chamam a este tipo de funções?

João: Lineares.

…

Professora Inês: Numa função linear precisaríamos de calcular assim? (Apontando para o cálculo analítico do declive que o par apresentou)

João: Não…

Apesar de o João ter respondido que não seria necessário calcular recorrendo à fórmula do cálculo analítico do declive, não soube dizer de que outra forma o poderia fazer. A Joana neste diálogo não respondeu à maioria das perguntas ou apenas confirmava o que o João respondia. Ambos têm bastante dificuldade nas justificações orais e, apesar de demonstrarem algum conhecimento sobre a noção de declive, evidenciam que esta não é uma temática plenamente consolidada.

O par Beatriz e Benedita apresentou o valor correto do declive das semirretas A e C (questão 1.3) mas, inicialmente, não estavam a conseguir calculá-lo. Devido a esse facto, foi necessário a intervenção da professora Nicole, pois estavam a utilizar dois pontos para o cálculo analítico do declive mas apenas um ponto de cada uma das retas ao invés de dois pontos de uma mesma reta.

Professora Nicole: Quantos pontos precisamos para calcular o declive?

Benedita: Dois.

Professora Nicole: E esses dois pontos têm que pertencer à reta ou não precisam?

Benedita: Precisam.

Professora Nicole: Então e esses pontos C e A pertencem os dois à reta A? (Apontando para os pontos escolhidos pelas alunas).

Benedita: Não, precisamos de dois pontos.

Professora Nicole: Concordas, Beatriz?

Beatriz: Sim… não tenho a certeza.

Benedita: Pode ser o (0,20).

Professora Nicole: A reta passa nesse ponto?

Beatriz: Não, é o (0,0).

Após este diálogo, as alunas conseguiram calcular o declive mas demonstraram bastantes dificuldades, tanto no cálculo analítico do declive, como na obtenção de pontos dada a respetiva representação gráfica. Quer a Beatriz, como a Benedita, revelaram algumas dificuldades e pouca confiança nos cálculos que apresentam, pedindo diversas vezes confirmação dos seus raciocínios.

5.5.4. Questão 1.4

1.4. Comenta a seguinte afirmação: "O declive da reta B é inferior ao declive da reta A"

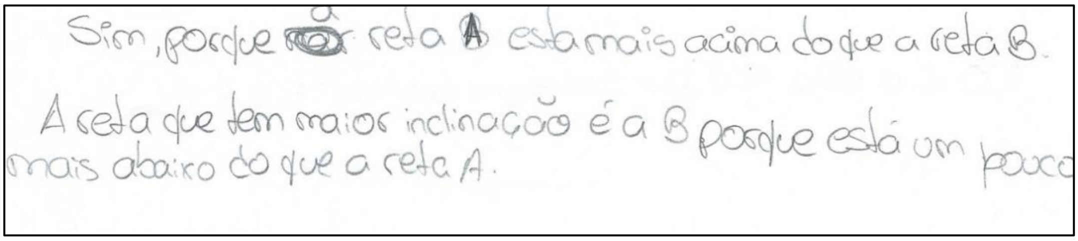
Figura 111 - Questão 1.4 da Entrevista

O par 1 não revelou dificuldades na formulação da resposta a esta alínea, tendo ambos concordado rapidamente que a afirmação era verdadeira e relacionado o valor do declive com a inclinação da respetiva reta (Figura 112).

Verdadeira pois a inclinação da reta B é menor que a da reta A.

Figura 112 - Resposta do João (Par 1) à Questão 1.4 da Entrevista

O par 2, apesar de ter respondido que a afirmação era verdadeira, teve mais dificuldades na formulação da resposta tendo, particularmente a Benedita, acabado por inclusivamente trocar as letras das duas semirretas (Figura 113). Apesar de este erro poder ser considerado um erro de transcrição do enunciado, ou mesmo de distração, este não parece ser o caso pois, além de confirmar que a afirmação é verdadeira, na discussão, com a Beatriz, ela diz o contrário.



Sim, porque a reta A esta mais acima do que a reta B.

A reta que tem maior inclinação é a B porque está um pouco mais abaixo do que a reta A.

Figura 113 - Resposta da Benedita à Questão 1.4 da Entrevista

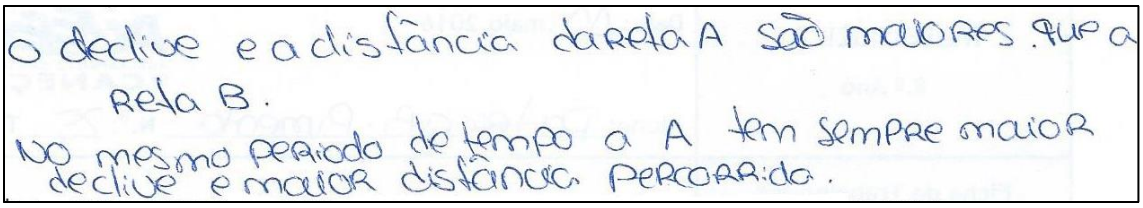
5.5.5. Questão 1.5

1.5. Qual a relação entre o declive e a distância percorrida?

Figura 114 - Questão 1.5 da Entrevista

Nesta questão o par 1 relacionou corretamente o declive com a inclinação, afirmando que “quanto maior o declive maior a inclinação”.

O par da Beatriz e da Benedita revelou mais dificuldades que o par do João e da Joana, mesmo após alguma discussão com a professora Nicole, tendo ambas revelado bastantes dificuldades na formulação de uma resposta. Este facto é visível na resposta da Beatriz à questão 1.4 (Figura 115).



O declive e a distância da reta A são maiores que a reta B.

No mesmo periodo de tempo a A tem sempre maior declive e maior distância percorrida.

Figura 115 – Resposta da Beatriz à questão 1.5 da Entrevista

Na segunda parte da resposta (Figura 115) a Beatriz chega mesmo a afirmar que a reta A tem sempre maior declive, como se ao longo da reta o declive fosse alterando. Por essa mesma razão, a aluna compara sempre a reta com outra, não conseguindo generalizar uma resposta.

5.5.6. Questão 1.6

1.6. No referencial apresentado no enunciado, esboça uma possível representação gráfica para o Rafael, que se deslocava de bicicleta. Explica o teu raciocínio.

Figura 116 - Questão 1.6 da Entrevista

Os dois pares traçaram a semirreta que representa a viagem do Rafael entre as semirretas B e C, tendo ambos justificado igualmente que a bicicleta seria mais rápida do que andar a pé mas mais lenta do que andar de autocarro (Figura 117).

Deve ser um pouco mais para cima ~~porque~~ da reta C
porque de bicicleta anda-se mais rápido do que se
formos a pé. Mas não pode ser mais para cima
que a A e ~~a~~ B porque o autocarro e o automóvel
andam mais rápido.

Figura 117 - Resposta da Beatriz (Par 2) à Questão 1.6 da Entrevista

A resolução desta questão evidencia que os alunos têm noção da influência do declive na representação gráfica de funções, conseguindo relacionar a velocidade de cada um dos transportes com a posição relativa das retas.

5.5.7. Síntese

Apesar de os quatro alunos terem respondido corretamente às alíneas 4 e 5 da primeira questão, onde era questionado a relação entre os declives de duas retas e a relação entre o declive e a distância percorrida, estes revelaram que não têm a noção de declive totalmente consolidada. Na verdade, apenas conseguem responder quando as perguntas lhes são colocadas diretamente, revelando mais dificuldades quando necessitam de associar diversos temas. Além deste facto, os alunos não revelam sentido crítico, na medida em que, após responderem a uma determinada questão não verificam se a mesma faz sentido no contexto do problema. Como é evidente na questão 1.3, o segundo par calculou inicialmente de forma incorreta o valor do declive, obtendo um valor negativo e não conseguiu, nesse momento, perceber imediatamente que o valor do declive não poderia ser negativo quando as semirretas apresentadas são todas crescentes.

Como também foi evidente nas transcrições de alguns segmentos das entrevistas, os alunos evidenciam bastantes dificuldades nesta temática, principalmente o par da Beatriz e da Benedita que mostraram ainda não dominar conceitos iniciais, tais como o cálculo analítico do declive e a obtenção de dois pontos sendo dada a representação gráfica. Salientando-se ainda que, os dois pares após a aprendizagem da fórmula do cálculo analítico do declive, recorrem quase exclusivamente à mesma para o cálculo do declive em funções lineares, mesmo quando questionados se poderiam fazer de outra forma. Neste caso, o João e a Joana responderam afirmativamente apesar de já não se recordarem como o fariam, mas a Beatriz e a Benedita respondem que só poderiam calcular dessa forma.

5.6. Entrevista – Questão 2

2. Considera as seguintes funções afins:
$f(x) = -3x + 1$ $\quad g(x) = 2x$ $\quad h(x) = -3x - 5$ $\quad i(x) = 5$

2.1. Indica quais destas funções são crescentes? E decrescentes? Explica a tua resposta.

2.2. Qual é a posição relativa das retas que representam as funções f e h? Justifica a tua resposta.

2.3. Escreve a expressão de uma função afim que passe pelos pontos A(5, -1) e B(7, 3). Existe alguma relação entre a reta que representa esta função e as retas anteriormente representadas?

Figura 118 - Questão 2 da Entrevista

A questão 2 da Entrevista tem como objetivo relacionar a monotonia da função com as respetivas expressões algébricas, sendo que para tal são apresentadas funções constantes, lineares e afins, mas também a posição relativa de retas e a formulação de uma expressão algébrica dados dois pontos.

À semelhança da questão anterior serão apresentadas resoluções dos dois pares de alunos que realizaram as entrevistas.

5.6.1. Questão 2.1

Tanto a Beatriz como a Benedita, apesar de terem respondido corretamente quanto às funções $f(x)$ e $h(x)$, consideraram que tanto a função $g(x)$ como a $i(x)$ são crescentes porque são positivas (Figura 119), possivelmente confundindo o valor do declive com o valor da ordenada na origem no caso da $i(x)$. Tal facto, na minha opinião, deve-se às alunas compararem o primeiro valor que é apresentado, sem verificarem se se trata do valor do declive ou do valor da ordenada na origem e do significado de cada um dos valores.

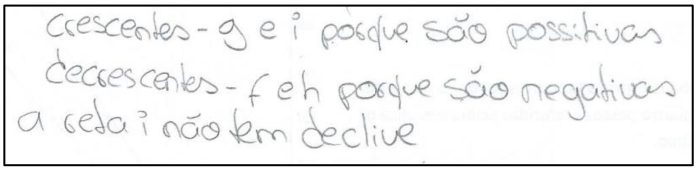

crescentes - g e i porque são possitivas
decrescentes - f e h porque são negativas
a reta i não tem declive

Figura 119 - Resposta da Benedita (Par 2) à Questão 2.1 da Entrevista

A Benedita no final da resposta (Figura 119), apesar de ter referido que a função $i(x)$ era crescente afirma, no entanto, que “a reta i não tem declive”. A Beatriz não afirmou o mesmo, identificando apenas quais as retas que eram crescentes ou decrescentes. As alunas para responderem a esta questão, compararam o valor obtido do declive na questão 1 (positivo) com o facto de as retas estarem apresentadas graficamente, tendo ambas manifestado bastantes dificuldades nas notações de declive e ordenada na origem.

Professora Nicole: Esta função é afim. Como se chama este número? (Apontando para o valor do declive).

Benedita: Termo dependente…?

Professora Nicole: O valor -3. O que significa?

Beatriz: O x…?

Professora Nicole: Lembram-se como é que é a expressão de uma equação reduzida de uma reta?

Benedita e Beatriz: *y=ax+b.*

Professora Nicole: E o que era o a?

Beatriz: A variável…

Benedita: …constante, não sei…

Professora Nicole: E o b?

Beatriz: Não sei…

Como está evidente nesta transcrição, as alunas não têm noção do significado de cada um dos valores – declive e ordenada na origem – na medida em que têm em atenção apenas o primeiro valor apresentado numa função e, muito particularmente, o seu sinal.

Devido a alguma confusão que os alunos revelaram ao analisar a função $i(x)$, pedi que representassem a mesma graficamente. Tanto a Joana como a Beatriz representaram corretamente a função $i(x)$ (Figura 120).

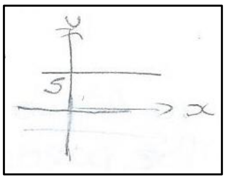


Figura 120 - Representação gráfica da função i(x) realizada pela Joana

Neste mesmo desafio lançado por mim, o João representou uma função linear (Figura 121) que passa no ponto (5, 5) (ver transcrição seguinte) e a Benedita apenas marcou o ponto (0, 5) no referencial (Figura 122).

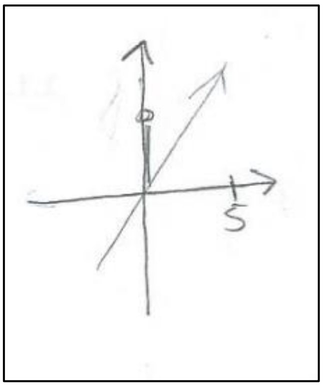


Figura 121 – Representação gráfica da função i(x) realizada pelo João

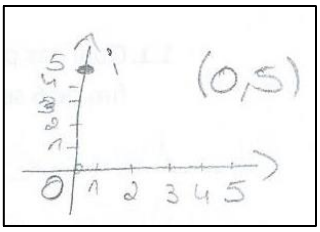


Figura 122 - Representação gráfica da função i(x) realizada pela Benedita

Professora Inês: Como é a representação gráfica da função $i(x)$?

João: Assim! Aqui a tocar no ponto. (Apontando para o ponto (5,5))

(…)

João: Por isso tem de ser assim… daqui a aqui… aqui é o 5. (Apontando com o lápis da origem do referencial até ao ponto (5,5)).

Ao realizarem estas representações gráficas da função constante (Figura 121 e 122), os alunos revelam as suas dificuldades na conversão da expressão algébrica para a respetiva representação gráfica. Tornando-se também desta forma evidente as dificuldades dos alunos na noção de declive, nomeadamente na ausência do significado de uma função de declive nulo.

5.6.2. Questão 2.2

2.2. Qual é a posição relativa das retas que representam as funções f e h? Justifica a tua resposta.

Figura 123 - Questão 2.2 da Entrevista

Na questão 2.2 todos os alunos respondem corretamente que as retas são paralelas pois têm declive igual. No entanto, antes de responderam, surgiram algumas dúvidas na discussão entre o João e a Joana. O João afirmou rapidamente que as retas eram paralelas mas a Joana achava que as retas, por terem o mesmo valor de declive, eram coincidentes.

Professora Inês: Qual é a posição relativa das funções f(x) e h(x)?

Joana: São as duas coladas uma à outra, porque têm o mesmo declive.

Professora Inês: Coincidentes?

Joana: Sim!

Professora Inês: E o que é que tu achas, João?

João: Como assim? Como elas estão no gráfico?

Professora Inês: Sim, a f(x) e a h(x).

João: São paralelas!

Professora Inês: E tu, achas que são coincidentes. Qual é a diferença entre paralelas e coincidentes?

João: Paralelas estão lado a lado e coincidentes … (mostra duas canetas sobrepostas).

[O João não conseguiu verbalizar que as retas coincidentes estariam sobrepostas]

Joana: Eu ia dizer que estão sobre, porque o declive é o mesmo.

João: Mas este é -5 e este é +1 (referindo-se que se os valores da ordenada na origem são distintos as retas não poderiam ser coincidentes).

Nesta transcrição são evidentes as dificuldades que a Joana tem na defesa da sua posição relativamente à posição relativa das retas, associando o mesmo valor do declive a retas coincidentes e valores distintos de declive a retas paralelas.

5.6.3. Questão 2.3

2.3. Escreve a expressão de uma função afim que passe pelos pontos A(5, -1) e B(7, 3).
Existe alguma relação entre a reta que representa esta função e as retas anteriormente representadas?

Figura 124 - Questão 2.3 da Entrevista

Na questão 2.3 nenhum dos alunos conseguiu escrever a expressão algébrica, pois não conseguiram obter diretamente o valor da ordenada na origem, nem tentaram calcular esse valor. Ambos se recordavam que já tinham calculado o valor da ordenada na origem tendo apenas dois pontos que pertençam à reta, mas já não se recordavam do procedimento a utilizar. Apesar deste facto, os quatro alunos conseguiram obter corretamente o valor do declive (Figura 125) e responder à segunda parte da questão. O João respondeu inclusivamente que o declive era igual mas desconhecia o valor da ordenada na origem pelo que as retas podiam ser paralelas ou coincidentes, mobilizando assim os conceitos trabalhados na discussão da questão 2.2.

A(5, -1)
B (7, 3)

$$\frac{-1-3}{5-7} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad y = 2x + b$$

R: A relação será entre a g devido ao declive ser o mesmo entre as duas.

Figura 125 - Resposta da Joana à questão 2.3 da Entrevista

Mais uma vez, é evidente a ausência de notação adequada para representar o valor do declive, mas também a dificuldade na formulação de uma justificação totalmente correta. Apesar de justificarem que existe relação entre a expressão algébrica obtida e a função $g(x)$, a argumentação utilizada – "devido ao declive ser o mesmo entre as duas" (Figura 125) – não referem, no entanto, que as retas podem ser paralelas ou coincidentes dependendo do valor da ordenada na origem.

5.6.4. Síntese

Os alunos manifestaram dificuldades na conversão da expressão algébrica para a respetiva representação gráfica, primordialmente devido às dificuldades existentes na noção de declive. Os alunos ainda não têm consolidada a relação direta entre o valor do declive e da inclinação da reta, apesar de, pelas respostas dadas anteriormente, ser de salientar que essa dificuldade é mais acentuada quando o declive é nulo.

Este facto também é sustentado pelas respostas dos alunos na questão 1.1 da entrevista, quando respondem que o autocarro tem paragens e, por isso, é mais lento que o carro, apesar de o gráfico com a representação da reta não incluir funções de declive nulo.

Outra dificuldade que os alunos revelaram ao longo de todas as tarefas diz respeito à correta utilização de notação matemática, bem como à formulação de justificações apropriadas. Como está presente nas transcrições áudio apresentadas anteriormente, os alunos não têm apenas dificuldades nas justificações escritas mas também nas suas justificações orais.

Apesar das dificuldades supramencionadas, os alunos já revelaram alguns conhecimentos da noção de declive, como está presente nas justificações dos mesmos na monotonia das funções e principalmente na posição relativa das retas. Outro aspeto positivo a salientar é a discussão em torno da noção de retas paralelas ou coincidentes, apesar de a Joana ter confundido as mesmas, o João conseguiu argumentar bastante bem as diferenças e explicá-las à colega, referindo mesmo a influência do valor da ordenada na origem.

Capítulo 6
Conclusão

Neste capítulo apresentarei as principais conclusões obtidas, tendo em conta o capítulo da Análise de Dados, dando assim resposta às questões de investigação que elaborei para orientar o meu estudo.

O objetivo deste estudo foi analisar as aprendizagens de alunos do 8.º ano no que diz respeito à noção de declive nas funções afim, linear e constante.

Neste sentido, o capítulo foi organizado de acordo com as próprias questões de investigação:

– Que compreensão revelam os alunos da noção de declive nos vários tipos de função?

– Como se evidencia essa compreensão nas várias representações de uma função? E na conversão entre representações?

6.1. Principais Conclusões

As questões de investigação foram, naturalmente, determinantes para a orientação do estudo, nomeadamente para o seu planeamento, para a construção das tarefas, para a elaboração das fichas de trabalho que os alunos trabalharam, bem como para a escolha de todos os materiais utilizados durante a lecionação da subunidade Gráficos de Funções Afins.

Que compreensão revelam os alunos da noção de declive nos vários tipos de função?

Os alunos da turma do 8.º ano em que incidiu o estudo, no ano letivo anterior (7ºano), tinham tido já a oportunidade de estudar a função linear, com especial destaque para a função de proporcionalidade direta. Consequentemente, e como seria expectável, foi neste tipo de funções que revelaram menor dificuldade na noção de declive, quando, neste seu 8.º ano, voltaram a ser confrontados, ou desafiados, com esta noção. Considero que, este facto – compreensão da noção de declive das funções lineares – será uma consequência de, no ano anterior, se ter estudo o valor da constante de proporcionalidade nas funções de proporcionalidade direta.

No entanto, e apesar desta noção de declive parecer estar interiorizada, quando desafiados em tarefas que se foquem no paralelismo entre retas, a maioria dos alunos da turma do 8.º ano não foi capaz de relacionar imediatamente esta relação entre as retas e o valor da respetiva constante de proporcionalidade. Os alunos chegaram, inclusivamente, a referir que o paralelismo entre as retas apresentadas e o valor da constante de proporcionalidade como sendo duas características sem relação entre si.

Foi igualmente possível verificar que, dos três tipos de funções estudadas com os alunos da turma do 8.º ano – função afim, linear e constante – estes revelaram, talvez até de forma algo surpreendente, uma muito menor compreensão imediata na noção de declive na função constante. Na verdade, a maioria dos alunos argumentou mesmo que este tipo de função não tinha declive, talvez devido à sua posição relativa na representação gráfica ou por não observarem um ângulo formado pela reta e pelo eixo dos *xx*. De igual forma, no caso deste tipo de função revelaram muitas dificuldades no reconhecimento do declive através da respetiva expressão algébrica, justificando com o facto da variável em questão não aparecer, isto é, não estar visível na expressão.

Quando era apresentada uma função afim ou linear através da respetiva expressão algébrica, os alunos conseguiam identificar facilmente o valor do declive. Esta evidência é corroborada pelo estudo elaborado por Canário (2011), que identifica que os alunos na função linear e de proporcionalidade direta conseguem identificar o valor do declive e a influência do mesmo e pelo estudo de Candeias (2010) que refere que os alunos identificam corretamente gráficos que representam funções lineares.

Ao longo do estudo da noção de declive, os alunos revelaram maiores dificuldades na compreensão da influência desse parâmetro nas funções afins, perante a expressão algébrica, na medida em que tinham de trabalhar, simultaneamente, com o valor da ordenada na origem.

Num outro momento distinto, quando foi introduzida a fórmula do cálculo analítico do declive, os alunos assumiram quase imediatamente o uso desta fórmula, passando a calcular o declive, quase exclusivamente, com recurso à mesma, mesmo em funções lineares, parecendo esquecerem-se das noções mais intuitivas do mesmo que lhes permitira, em diferentes momentos, fazer uso imediato do valor do declive. Naturalmente que, apesar de não estar incorreto o uso da fórmula para os cálculos em questão, quando confrontados com a hipótese de calcularem de maneira distinta, a maioria dos alunos já não se recordava de como fazê-lo. Esta dificuldade estará, na minha perspetiva, também ligada ao facto de os alunos não associarem o valor do declive de uma reta que passa na origem do referencial ao valor da constante de proporcionalidade de uma função de proporcionalidade direta.

Na sua maioria os alunos conseguem aplicar corretamente a fórmula do cálculo analítico do declive. Ainda assim, alguns alunos cometem erros, principalmente, erros de manipulação, tal como referido por Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011), como por exemplo, troca do valor do objeto com o valor da imagem ou erros de cálculo aritmético.

Resumindo, apesar de os alunos da turma do 8.º ano terem iniciado o estudo da noção de declive, particularmente de funções de proporcionalidade direta, sem grandes dificuldades, na sequência natural do que já tinham trabalhado no ano letivo anterior relativamente às funções, a verdade é que esse conhecimento se revelou menos consolidado quando transportado para outros tipos de funções, nomeadamente as funções constantes, onde sentiram maior dificuldade em identificar o próprio valor do declive. Por outro lado, e uma vez introduzido o cálculo analítico do valor do declive, os alunos passaram a usar, quase em exclusivo, esta forma mais analítica, revelando a preferência por uma ferramenta que lhes permita obter sempre os resultados que procuram, em detrimento de abordagens mais intuitivas da noção de declive. Esta insegurança revelada no domínio mais intuitivo da noção de declive revelou-se também quando os alunos foram desafiados a comparar os declives de retas, particularmente o seu paralelismo. Apesar deste facto, quando os valores do declive eram distintos, os alunos, na sua maioria, conseguiam concluir a influência dos mesmos na inclinação das retas.

Como se evidencia essa compreensão nas várias representações de uma função? E na conversão entre representações?

Ao longo de toda a subunidade Gráficos de Funções Afins onde incidiu este estudo, tentei implementar nas diferentes tarefas e fichas de trabalho uma diversidade de representações matemáticas – gráfica, expressão analítica e tabular – como defende Gafanhoto e Canavarro (2008), pois desta forma os alunos são confrontados com a noção de declive nas múltiplas representações de uma função e na conversão entre as mesmas.

No início da lecionação da subunidade existiram, naturalmente, momentos de revisão de conteúdos lecionados no ano anterior, permitindo assim um melhor enquadramento para os desafios seguintes. Efetivamente, no momento de revisão da leitura e interpretação da representação gráfica, foram já notórias as dificuldades dos alunos na influência da diferente inclinação das retas (segmentos de retas ou semirretas) e na sua relação com o comportamento da própria função. Estas dificuldades revelaram-se um fator determinante para a sua consolidação da noção de declive, apesar do trabalho de grande incidência sobre as mesmas. Na verdade, foi sempre um desafio para os alunos conseguirem relacionar as diversas características de uma função.

No momento do estudo em que foi introduzida a função afim e a informação era apresentada na forma tabular, os alunos continuaram a aplicar uma relação de proporcionalidade, o que corrobora o estudo elaborado por Bárrios (2011). Por outro lado, no momento de realização das tarefas associadas à função afim, os alunos revelaram igualmente maiores dificuldades a trabalhar com a sua forma tabular, por oposição ao trabalho com a respetiva expressão algébrica. Aliás, quando os dados eram apresentados na forma tabular, a maioria dos alunos optou mesmo por fazer uso desses dados e convertê-los para a respetiva expressão algébrica, revelando assim a forma como se sentiam mais confortáveis no trabalho com a função em questão.

De igual forma, quando os dados eram apresentados na forma tabular ou na expressão algébrica, os alunos tinham também dificuldades em conjeturar como os parâmetros do declive e da ordenada na origem iriam influenciar a respetiva representação gráfica. Na verdade, os alunos pareciam só ter essa noção quando era apresentada a representação gráfica de uma função e, simultaneamente, a respetiva expressão algébrica. Apesar de sentirem necessidade de visualizarem a representação gráfica para conseguirem concluir um raciocínio ou procedimento, nenhum aluno converteu para essa representação se não tivesse indicado no enunciado que era necessário fazê-lo.

A expressão algébrica foi das representações em que os alunos sentiram mais dificuldades, tendo a maioria conseguido identificar e argumentar qual o valor do declive, talvez por ter sido bastante reforçado durante a lecionação desta subunidade a equação da reta $y = mx + b$. No entanto, tudo se tornava mais difícil para os alunos se a equação da reta não fosse apresentada na forma reduzida. Além deste facto, e uma vez mais, os alunos sentiram dificuldades quando era apenas apresentada a expressão algébrica, não conseguindo conjeturar, ou comparar, o valor do declive de diversas retas.

Sempre que era apresentada a representação gráfica de uma função, os alunos compreendiam a relação entre o valor do declive positivo, negativo ou nulo e a respetiva monotonia das funções. O mesmo não se verifica, no entanto, quando a função é apresentada em outro tipo de representação.

Por outro lado, os alunos revelaram bastantes dificuldades na própria representação gráfica de uma função, particularmente na marcação de pontos no referencial, mas também, como foi descrito por Loureiro (2013), só costumam considerar valores positivos e limitam o gráfico da função ao primeiro quadrante. Quando se tratam de situações contextualizadas, os alunos continuam a traçar uma reta, ou uma semirreta, com início na origem, não verificando se faz sentido no contexto do problema nem tendo em consideração o domínio do mesmo.

Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011) mencionam que existem diferentes erros na conversão entre representações: erros de manipulação ou erros conceptuais. A maioria dos alunos tende a fazer erros de manipulação, isto é, calculam incorretamente problemas aritméticos, como foi o caso do cálculo analítico do declive ou utilizam nomes para as variáveis incorretos. Estes alunos sempre manifestaram falta de rigor matemático e utilização incorreta de notações, o que dificulta as conversões entre representações.

A grande maioria dos alunos manifestou bastantes dificuldades na conversão entre representações. A conversão que suscitou mais dificuldades foi a conversão para a respetiva expressão algébrica, sempre que foi necessário, o que está em plena concordância com o estudo elaborado por Bárrios (2011). A conversão da expressão algébrica para a respetiva representação gráfica também se revelou problemática, devido ao facto de os alunos sentirem dificuldades na obtenção de pontos que pertençam a uma função dada a respetiva expressão algébrica, mas também à falta de planeamento. Neste aspeto, muitos alunos revelaram as suas dificuldades logo no momento inicial, nomeadamente, em saber como deve preceder e que passos se deve efetuar.

Nos estudos realizados por Bárrios (2011) e por Consciência (2013), os alunos sentiam necessidade de recorrer a uma conversão intermédia antes de converterem para a representação pretendida. Estas autoras argumentavam que este passo intermédio era evidente pois as conversões tinham diferentes graus de dificuldade. Apesar de ser notório os diferentes graus de dificuldade entre as representações usadas, os alunos desta turma nunca usaram uma representação intermédia. Este facto, na minha opinião deve-se maioritariamente às dificuldades dos alunos nesta temática e ao fenómeno da compartimentalização no estudo das funções. Este fenómeno de compartimentalização é referido no estudo elaborado por Almeida e Oliveira (2009) como sendo um dos grandes obstáculos à compreensão das funções. De facto, ao trabalhar com os alunos foi evidente, que estes, na sua maioria, não conseguiam associar e relacionar todos os conceitos que foram sendo aprendidos nesta temática, quando era introduzido um novo conceito os alunos utilizavam o mesmo como sendo independente do que já tinham aprendido.

Nesta turma foi evidente que a conversão que causava menos dificuldades era conversão da representação tabular para a representação gráfica. O que corrobora que, quando a expressão algébrica está envolvida, os alunos sentem mais dificuldades.

6.2. Reflexão Final

Antes de me inscrever no mestrado em Ensino de Matemática, as minhas expetativas eram bastante altas principalmente devido à oportunidade de aprender mais sobre didática e de puder ter um primeiro contacto com as escolas e os alunos.

Durante o primeiro ano letivo, nas disciplinas de Iniciação à Prática Profissional I e II pude ir às escolas e assistir a algumas aulas, mas também falar com professores de Matemática. Consegui ouvir algumas histórias e experiências de professores que já percorreram um longo caminho e contactaram com inúmeros alunos, o que foi bastante gratificante.

Também na disciplina de Iniciação à Prática Profissional II pude participar em um estudo de caso e, pela primeira vez, participei na elaboração de tarefas que iriam ser implementadas numa turma do 7.º ano de escolaridade. Planeámos essas aulas e assisti às mesmas, vi a reação dos alunos a essas tarefas, as dificuldades e estratégias que tínhamos previsto, mas também as que não tínhamos. Foi nesse momento, que eu me apercebi da importância do planeamento pois, mesmo ao sermos surpreendidos, quanto mais planearmos melhor conseguimos atender às dúvidas colocadas, às diferentes estratégias e resoluções que possam sempre surgir.

Além das disciplinas da prática profissional, as de didática e metodologia da matemática foram as que mais me marcaram. Destaco, nomeadamente, os momentos de discussão aberta entre professores e mestrandos. Estes momentos de partilha e confronto de ideias diferentes fizeram-me refletir e penso que evoluir enquanto futura professora.

Durante todo o mestrado, a minha maior expetativa das unidades curriculares sempre foi a Iniciação à Prática Profissional III devido a toda a experiência e maioritariamente, sem dúvida, ao momento de lecionação. Desde a primeira aula que assisti, particularmente a primeira vez que conheci a turma onde iria realizar o estudo, que fiquei entusiasmada, mas também nervosa com a responsabilidade que iria ter com aqueles trinta alunos. Assisti, também a todas as aulas da minha colega e todos os dias confrontávamos as nossas experiências, falávamos sobre o que achávamos que tinha corrido bem ou mal e estes momentos foram cruciais para o meu desenvolvimento. Acabamos por ter uma perspetiva diferente do nosso trabalho, mas também do que devemos mudar ou melhorar.

Olhando para todo este percurso, faço um balanço bastante positivo e sem dúvida, que superou as minhas expetativas. Tanto ao nível profissional, por tudo o que aprendi sobre pedagogia e a prática profissional, mas também a nível pessoal, pelos professores e colegas que pude conhecer.

Ao longo de este ano letivo, aprendi imenso com a experiência de assistir e participar nas aulas da turma em que realizei a minha intervenção. Desde as primeiras aulas, que fui desafiada para lecionar e não apenas nos momentos em que iria ser avaliada. Esta oportunidade foi única e tentei sempre aproveitá-la, os alunos foram sempre maravilhosos e bastante recetivos a esta experiência.

Esta turma, como todas as outras, tem especificidades próprias. Em particular, é uma turma com bastantes dificuldades e baixa consolidação nas bases matemáticas, o que também foi um desafio para mim. Ao longo de toda a intervenção e após refletir sobre os dados que tirei durante a mesma, foram notórias as grandes dificuldades em algumas capacidades transversais. Os alunos manifestaram dificuldades, particularmente, ao nível da comunicação matemática escrita e oral, na correta utilização das notações pedidas, bem como nas respetivas justificações, como é corroborado pelo estudo realizado por Canário (2011), que refere que os alunos sentem-se relutantes em justificar as suas respostas, mas que isso é uma consequência das suas dificuldades. Os alunos têm dificuldades na linguagem matemática e na capacidade de argumentação, apesar de ser um aspeto que acho fulcral e que tentei, sempre que possível insistir, sinto que os alunos ainda têm que ser mais estimulados neste sentido.

Outra capacidade transversal que os alunos não têm muito desenvolvida é o sentido crítico, dado que é muito raro verificarem a resposta que apresentam. Os alunos tendem a responder e avançar para a próxima questão, sem verificarem se faz sentido no contexto do problema. Este facto foi notório aquando do cálculo analítico do declive, alguns dos alunos calculavam erradamente, dando por exemplo um valor negativo quando a reta era crescente e mesmo os alunos que sabiam da relação acabavam por não detetar o erro pois não paravam para verificar a resposta.

Este facto era bastante notório quando os alunos trabalhavam com tarefas contextualizadas, nas quatro fases da modelação os alunos revelaram bastantes dificuldades na organização do problema (primeira fase), principalmente no planeamento de uma estratégia para iniciarem o trabalho. Mas foi evidente, que a maioria não interpretava a solução em termos da realidade nem comparava a solução com a realidade. Desta forma, os alunos acabam por não conseguir concluir uma resolução, ou apresentar uma solução incorreta, porque não conseguem diferenciar que se se trata de um problema com contexto têm sempre que identificar se a sua resposta faz sentido nesse mesmo contexto.

Uma das práticas, que em conjunto com a professora cooperante, tentei implementar foi o trabalho a pares, nos momentos de trabalho autónomo, e os momentos de discussão. Apesar de ter sido bastante reforçado estes momentos, quando analisei as reproduções escritas dos alunos, constatei que a maioria apresentava diferentes resoluções no mesmo par. Muitos dos alunos até iniciavam o trabalho em conjunto, mas rapidamente sentiam a necessidade de trabalharem sozinhos. Este facto pode dever-se a não estarem habituados a esta prática.

Ao longo de todo o ano letivo, senti bastantes dificuldades na gestão da turma, isto é, tentava atender todos os alunos e quando sentia que alguns se estavam a dispersar tentava voltar a captar a sua atenção. Mas ao ter estes procedimentos, os outros alunos acabavam por se desinteressar porque centrava bastante a aula nos que tinham mais dificuldades ou nos que se distraiam mais rapidamente. Outro aspeto negativo, era o comportamento dos alunos, sendo alguns muito conversadores e, consequentemente, dispersavam-se. Senti, em diversos momentos, bastantes dificuldades em conseguir controlar toda a turma e pô-la a trabalhar em conjunto. Ao longo do ano letivo fui insistindo com o trabalho fora da sala de aula e sobre a importância de um estudo continuado, tendo conseguido que alguns alunos começassem a ir à sala de estudo, mas infelizmente, na sua maioria, consegui ter pouca influência neste aspeto.

Sem dúvida, que esses foram os maiores problemas com que me deparei e que mais me afetaram durante este período. Houve muitos momentos que me sentia bastante frustrada, na medida em que queria, genuinamente, que eles se envolvessem mais, principalmente porque me percebi das reais capacidades de muitos e que não eram aproveitadas.

Devido principalmente a estes fatores e algumas falhas no meu planeamento das aulas, existiram algumas aulas, onde o plano de aula não foi cumprido. Inicialmente, este era um fator bastante importante para mim, mas com o tempo e ajuda da minha professora orientadora fui percebendo, que nem sempre, não cumprir o plano de aula era negativo.

Mas, sem dúvida, que com esta experiência, percebi a importância de um planeamento detalhado. Durante as aulas, a sensação que tenho, é que tudo passa num instante e que se não fosse este planeamento acabaria por perder algumas intervenções importantes ou não conseguiria enfatizar certos conceitos ou procedimentos importantes.

Esta foi uma experiência bastante enriquecedora, e marcante, que mudou algumas opiniões que tinha sobre a prática profissional. Com esta experiência consegui ter uma perceção maior de todos os desafios que é ser professor, tanto dentro como fora da sala de aula. Também foi bastante importante, as reuniões em que participei na escola pois consegui perceber a outra parte de ser professor, nomeadamente as decisões mais administrativas que se têm que tomar e toda a dinâmica que existe com os professores das outras disciplinas.

Referências

Almeida, A. C., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante, 17I (1,2)*, 87-118.

APM (2002). *Funções no 3.º ciclo com tecnologia.* Lisboa: APM.

Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2015) Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics.* Online DOI 10.1007/s10649-015-9628-9.

Bárrios, A. (2011). *Funções usando o software Graph. Um estudo com alunos de um Curso de Educação e Formação (Tipo 2).* Lisboa: IEUL.

Brendefur, J. L., Hughes, G. & Ely, R. (2015). A Glimpse into Secondary Students' Understanding of Functions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* 1-22.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(3), 113-133.

Canário, M. F. (2011). *Modelação e Utilização das Tecnologias no Estudo da Função Afim: Um Estudo de caso.* Lisboa: IEUL.

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra.* Lisboa: IEUL.

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* Lisboa: IEUL.

Ellis, A.B., Ozbur, Z., Kulow, T., Dogan, M.F., Williams, C.C., & Amidon, J. (2013). Correspondence and covariation: Quantities changing together. In M.V. Martinez & A.C. Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 119-126). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

Fernandes, D. (2005), *Avaliação em educação: Dez olhares sobre uma prática social incontornável* (pp. 155-165). Curitiba: Editora Melo.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2008). *A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações.* Lisboa: FCT.

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores de Matemática.* (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Herbert, S. (2008). Where is the rate in the rule?. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 28-36.

Lahikainen, A. R., Kirmanen, T., Kraav, I., & Taimalu, M. (2003). *Studying Fears in Young Children: Two Interview Methods*. Childhood, *10*(1), 83–104.

Loureiro, N. (2013). *A representação gráfica das funções linear e afim: um estudo com alunos do 8.º ano.* Lisboa: IEUL.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2013). Comunicação matemática nas práticas dos professores. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-164). Lisboa: IEUL.

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* 51-52, 10-27.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME – DGIDC.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interações*, 22, 196-216.

Rodrigues, A. & Kataoka, V. (nd). *Conceito de função – Uma abordagem intuitiva.* Universidade Universal de Lavras.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics, 90*(3), 303-319.

Santos, L. (2002). *Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como?* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Silva, M. & Rezende, W. (1999). Análise histórica do conceito de função. *Caderno de Licenciatura em Matemática, 2*(2), 29-33.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções 10.º ano*. Lisboa: ME-DES.

Yin, R. (1994). *Case study research – Design and methods* (2ª ed.). London: Sage Publications.

Anexos

Anexo 1 – Tarefas e Fichas de Trabalho

Anexo 1.1. Ficha Diagnóstica

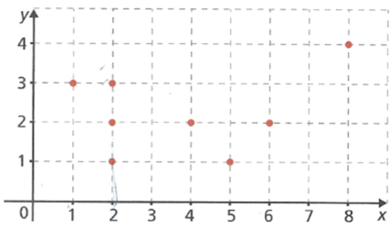
AGEEC – AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS	**Ficha Diagnóstica nº ____ – 8.º Ano** Data: 16 de março de 2016 Aluno:____________________________________ N.º: ____ Turma: ____
Professora: ___________________	Observações:____
Leia atentamente todas as questões. Justifique sempre que necessário todas as respostas. Apresente todos os cálculos que efetuar. Nas questões de escolha múltipla escolha apenas uma das opções apresentadas, se escolher mais do que uma opção a questão será anulada.	

1. Observa as correspondências seguintes:

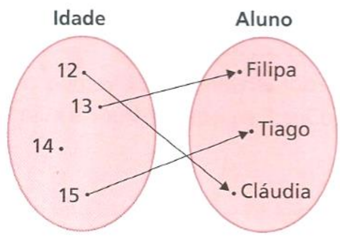
(A)

Comprimento do lado	0,1	2,4	3,6	12	100
Perímetro do pentágono regular	0,5	12	18	60	500

(B)



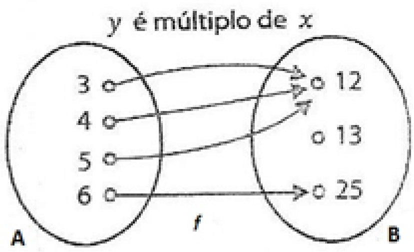
(C)



Indica, justificando a tua resposta, quais das correspondências (A), (B), (C) representam ou não representam uma função.

2. A função f está representada por um diagrama de setas.

2.1. Indica:



a) o domínio da função f.

b) o contradomínio da função f.

c) o conjunto de chegada da função f.

2.2. Observa a representação da função f e indica:

a) $f(6) =$ ______

b) $f($______$) = 25$

3. Considera as funções, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, definidas por:

$f(x) = -9x + 1$ $\qquad$ $g(x) = -4x$ $\qquad$ $h(x) = 11$

3.1. Indica o coeficiente de x e o termo independente da função f.

3.2. Indica se cada uma das funções é constante, linear ou afim, justificando a tua resposta.

3.3. Determina, apresentando os cálculos efetuados:

a) $f(-1) =$

b) a imagem de 0 por meio da função *h*. __________

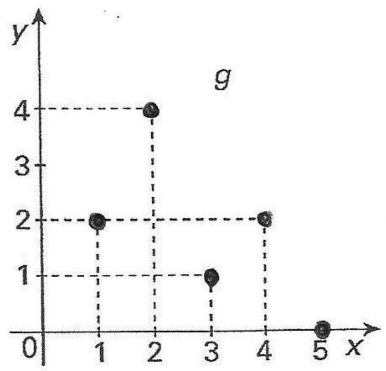
c) $g($____$) = -1$

3.4. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função *f*? Escolhe a opção correta e justifica a tua resposta.

(A) (-2,-17) **(B)** (0,-1) **(C)** (1,0) **(D)** (-3,28)

4. No referencial da figura está representado o gráfico de uma função *g*.

4.1. Qual é a variável independente?



4.2. Qual é a variável dependente?

4.3. Representa em extensão:

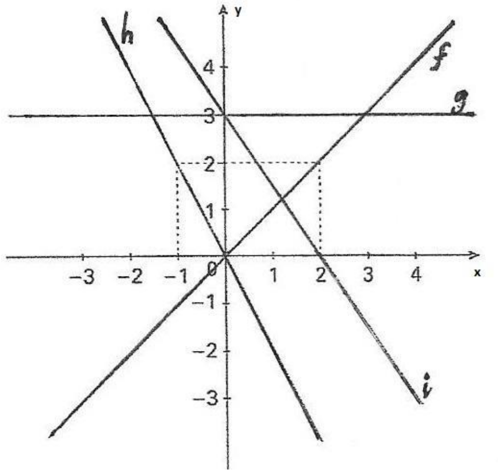
a) o domínio da função *g*.

$D_g =$

b) o contradomínio da função g.

$D'_g =$

5. Considera as funções representadas no mesmo referencial cartesiano da figura.



5.1. Observa os gráficos e estabelece a correspondência entre cada função e a respetiva expressão algébrica.

f •	• $y = -2x$
g •	• $y = x$
h •	• $y = -\frac{3}{2}x + 3$
i •	• $y = 3$

5.2. Indica para cada função f, g, h e i se se trata de uma função constante, linear ou afim. Justifica a tua resposta.

6. A tabela representa uma relação de proporcionalidade direta, $x \hookrightarrow y$.

$\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{7}{2}$	5		9
$\boldsymbol{y}$	20		350	500	700	900

6.1. Indica a constante de proporcionalidade. Justifica a tua resposta.

6.2. Completa a tabela.

6.3. Determina uma expressão algébrica para a função de proporcionalidade direta, f, associada à tabela.

7. O Rafael observa uma tempestade. A tabela seguinte mostra a relação entre o tempo (em segundos) decorrido entre o relâmpago e o trovão, e a distância (em quilómetros) a que a trovoada ocorre do Rafael.

Tempo (*s*)	10	20	30	60
Distância (*Km*)	3,4	6,8	10,2	20,4

7.1. Neste contexto, podes afirmar que a distância (em quilómetros) e o tempo (em segundos) são grandezas diretamente proporcionais? Explica a tua resposta.

7.2. A que distância do Rafael ocorre a trovoada se o tempo que decorre entre o relâmpago e o trovão é de 1,5 minutos?

7.3. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas variáveis (tempo e distância).

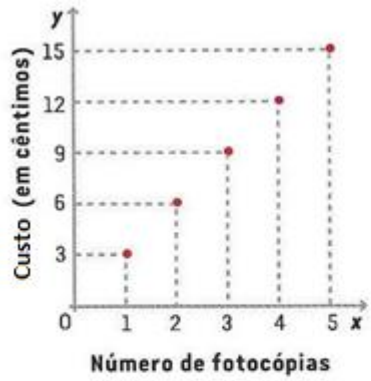
Bom trabalho!

Anexo 1.2. Ficha de Trabalho N.º 1: Funções

Matemática	Data: 4.abril.2016
8.º Ano	Aluno:________________________________ N.º: _____ Turma: _
Ficha de Trabalho N.º 1	Funções

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

1. Para promover o espetáculo de final de ano da sua escola, a Alice decidiu imprimir panfletos para a sua divulgação. O custo das impressões na papelaria está representado no gráfico seguinte.



1.1. Observa o gráfico e completa a tabela:

Número de fotocópias		2		4	5
Custo (cêntimos)	3	6	9	12	

1.2. Neste contexto, podes afirmar que o número de fotocópias e o custo (em cêntimos) são diretamente proporcionais? Explica a tua resposta.

1.3. Quanto pagaria a Alice se quisesse fazer 998 fotocópias do seu panfleto? Apresenta o resultado em euros.

1.4. Escreve uma expressão algébrica que relacione as duas variáveis (número de fotocópias e o custo). Explica como obtiveste essa expressão.

1.5. Quantas fotocópias dos panfletos poderá a Alice fazer se só quiser gastar 25 euros? Justifica a tua resposta.

2. Nas férias da Páscoa a Alice foi com a sua família passear de automóvel à Serra da Estrela. Saíram de manhã, mas só chegaram às 15h ao seu destino porque pararam pelo caminho para almoçar. O gráfico ao lado indica a distância percorrida pela família a partir do momento em que saíram de casa.

2.1. A que horas a família da Alice saiu de casa?

2.2. A que horas a família da Alice parou para almoçar?

2.3. Quanto tempo durou a paragem para o almoço? Explica a tua resposta.

2.4. Ao observares o gráfico, o que podes dizer sobre as duas primeiras horas de viagem da Alice? Explica a tua resposta.

2.5. Quanto tempo, após o início da viagem chegou a Alice à Serra da Estrela? Justifica a tua resposta.

2.6. Indica, justificando, que distância percorreu a Alice para chegar à Serra da Estrela?

Anexo 1.3. Ficha de Trabalho N.º 2: Funções – Parte 2

Matemática 8.º Ano	Data: 6.abril.2016 Aluno:_______________ N.º: _____ Turma: __	AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS
Ficha de Trabalho N.º 2	Funções - Parte 2	

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. A Alice foi com o seu pai à padaria que diariamente tem 60 pães de tamanho médio para venda. O custo de cada pão desse tipo é de 60 cêntimos.

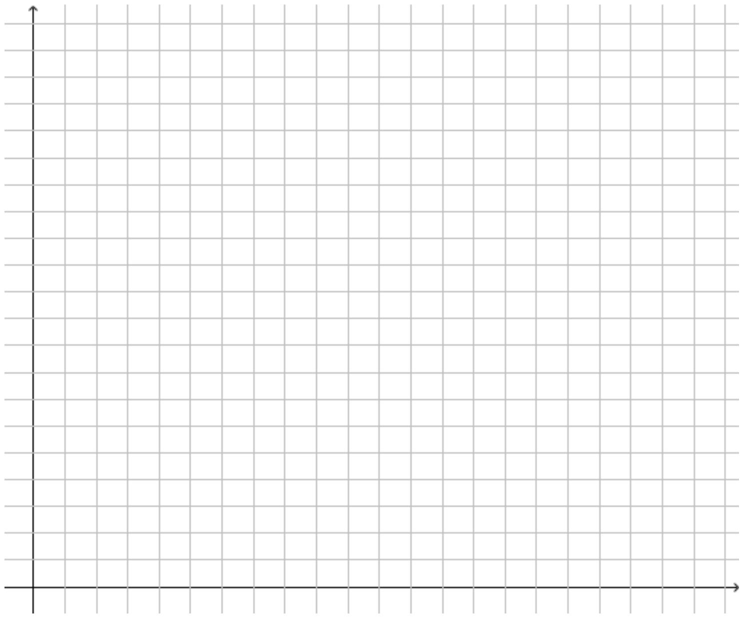
3.1. Quantos pães se podem comprar com 16 euros?

3.2. Completa a tabela seguinte.

Número de pães comprados (por cliente) (x)		10		52	60
Custo (em euros) (y)	1,2		13,8		

3.3. Escreve uma expressão algébrica da função f que relaciona o custo (em euros), com o número de pães comprados.

3.4. Atendendo a este contexto, utiliza os dados da tabela e constrói uma representação gráfica da função *f*.



3.4.1. Indica as coordenadas de um ponto que pertença ao gráfico da função.

3.4.2. O ponto Q (70;42) pertence ao gráfico da função f? Justifica a tua resposta.

3.4.3. É possível que a Alice tenha pago 4,5 euros pela compra de uma certa quantidade deste tipo de pães? Justifica a tua resposta.

3.4.4. Indica as principais características do gráfico desta função.

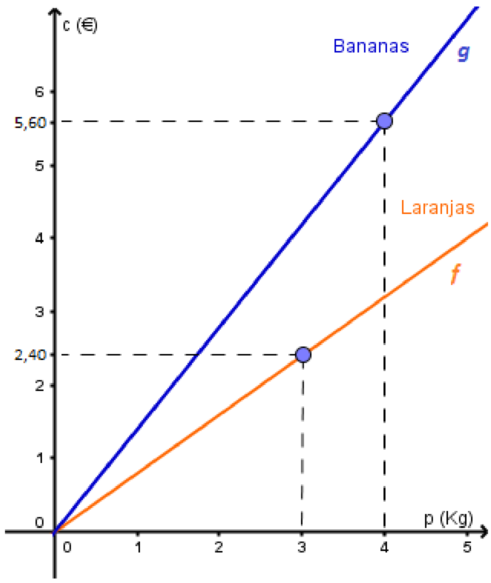
Adaptado da Brochura de Álgebra

Anexo 1.4. Ficha de Trabalho N.º 3: Funções – Parte 3

Matemática 8.º Ano	Data: 7.abril.2016 Aluno:______________________ N.º: _____ Turma: ____
Ficha de Trabalho N.º 3	**Funções - Parte 3**

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas, apresentado todos os cálculos que efetuares.

4. O Ricardo acompanhou o seu pai ao supermercado. No referencial ao lado estão representadas graficamente as funções f e g que relacionam, respetivamente, as quantidades p (em quilogramas), e os custos c (em euros), de laranjas e bananas que são vendidas nesse supermercado.



4.1. Quanto pagará um cliente que compre $3kg$ de laranjas e $4\ kg$ de bananas?

4.2. O Ricardo levou para casa $2kg$ de bananas e $1kg$ de laranjas. Indica, justificando, quanto pagou pela fruta.

4.3. Se o pai do Ricardo quisesse gastar 6 euros em laranjas, que quantidade (em quilogramas) de laranjas compraria? Justifica.

4.4. Determina, para cada uma das funções f e g a sua expressão algébrica. Explica como obtiveste cada uma das expressões.

4.5. **a)** Indica características comuns às duas funções f e g.

b) Indica o que distingue as duas funções f e g.

4.6. "As funções f e g são constantes". Indica, justificando, se esta afirmação é verdadeira ou falsa.

1.7. Este supermercado tem a opção de entrega ao domicílio. Este serviço tem um custo fixo de 2 euros, para além do preço dos produtos.

(a) Quanto pagará o pai do Ricardo se comprar $3kg$ de laranjas e optar pelo serviço de entrega ao domicílio? Justifica.

(b) Qual a diferença entre o valor que obtiveste na alínea anterior e o que o pai do Ricardo pagaria se não quisesse a entrega ao domicílio? Explica a tua resposta.

(c) Escreve a expressão algébrica que traduz a função j, que corresponde ao custo total do serviço de entrega e da quantidade (em quilogramas) de laranjas adquiridas pelo cliente.

1.8. Representa no referencial seguinte as funções f e j.

1.8.1. Que características comuns têm as representações gráficas das duas funções? Explica a tua resposta.

1.9. Indica, justificando, que relação existe entre as expressões algébricas das funções f e j.

2. O Rafael quis mudar o tarifário do seu telemóvel e foi pesquisar as tarifas em duas empresas.
Na empresa F, existia um custo fixo mensal de 3 euros e por cada minuto de conversação o Rafael pagaria 12 cêntimos.
Na empresa G, para além do custo fixo mensal de 7 euros, o Rafael teria de pagar 5 cêntimos por minuto de conversação.

2.1. Preenche a tabela seguinte, considerando f e g as funções que fazem corresponder o número de minutos de conversação ao preço mensal do tarifário (em euros) no tarifário F e G, respetivamente.

Número de minutos de conversação (por mês)	30	45	90	175	223
Custo mensal do Tarifário F (em euros)	6,60€			24€	
Custo mensal do Tarifário G (em euros)		9,25€		15,75€	

2.2. Neste contexto, qual é a variável dependente e a variável independente?

2.3. Determina $g(30)$ e explica o resultado neste contexto.

2.4. As funções f e g são funções constantes, lineares ou afins? Explica a tua resposta.

2.5. Indica uma expressão algébrica para cada uma das funções f e g, considerando x o número de minutos utilizados por mês para cada tarifário.

2.6. Indica o coeficiente de x e o termo independente:

2.6.1. da função f.

2.6.2. da função g.

2.7. Habitualmente, o Rafael fala ao telefone uma hora e 15 minutos por mês. Qual te parece ser o tarifário mais vantajoso para ele? Explica a tua resposta.

Anexo 1.5. Tarefa "Funções no GeoGebra"

Matemática 8.º Ano	Data: 11.abril.2016 Aluno:_______________ N.º: _____ Turma: _____
Tarefa "Funções no GeoGebra"	

Utiliza o GeoGebra para resolver as seguintes questões e recorre a cálculos auxiliares apenas quando for indicado.

1. No ambiente de trabalho do computador, abre a pasta "Matemática" e clica para abrir o ficheiro do GeoGebra **Q1**.

1.1. Traça a representação gráfica das seguintes funções, na *Folha Gráfica 2D* do GeoGebra:

1.1.1. $a(x) = 8$

1.1.2. $f(x) = 3x$

1.1.3. $h(x) = -7x + 6$

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

1.2. Representa os pontos A(6, -1) e B(3, 5) na *Folha Gráfica 2D* e com o auxílio do GeoGebra traça a reta que passa por esses dois pontos.
(**Sugestão:** para traçar a reta consulta **a página 5 do Guião do GeoGebra)**

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

1.2.1. Recorrendo exclusivamente ao **GeoGebra** escreve a equação da reta que traçaste.

1.3. Na mesma *Folha Gráfica 2D* do GeoGebra:

1.3.1. Traça uma representação gráfica de uma função paralela à função constante referida em 1.1.

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

(a) Recorrendo aos dados da *Folha Algébrica* do GeoGebra, indica a expressão algébrica dessa função.

1.3.2. Traça uma representação gráfica de uma função linear paralela a $h(x)$.

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro **Q1.**

(a) Recorrendo aos dados da *Folha Algébrica* do GeoGebra, indica a expressão algébrica dessa função.

1.3.3. Traça uma representação gráfica de uma função linear distinta das que já representaste.

Grava todas as alterações que efetuares no ficheiro Q1.

(a) Recorrendo aos dados da *Folha Algébrica* do GeoGebra, indica a expressão algébrica da função dessa função

Anexo 1.6. Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

Matemática **8.º Ano**	**Data: 14.abril.2016** **Aluno:**______________________________ **N.º:** ______ **Turma:**___

Tarefa "Um Passeio de Bicicletas"

- Justifica o teu raciocínio em todas as respostas.

- Caso consideres necessário, recorre ao GeoGebra para resolver alguma(s) das seguintes questões. Nesse caso, utiliza o ficheiro **Q1** da pasta "Matemática", do ambiente de trabalho.

2. Um grupo de amigos combinou fazer um passeio de bicicletas. Como nem todos os elementos do grupo tinham bicicletas, foram informar-se do valor a pagar pelo aluguer de uma bicicleta em duas empresas.

- Na empresa M, o preço a pagar (em euros) em função do tempo (em horas) do aluguer da bicicleta é dado pela função $m(x) = 6x + 1$, e inclui 1 euro do aluguer obrigatório de um capacete.

- Na empresa P, observaram alguns valores que os clientes tinham pago e que incluíam 4 euros do aluguer obrigatório de um capacete:

Número de horas do aluguer	3	4	7
Custo do aluguer (em euros)	16	20	32

2.1. O grupo de amigos quer passear de bicicleta durante uma hora.
Na tua opinião, em que empresa será mais vantajoso fazer o aluguer das bicicletas para uma hora? Explica a tua resposta.

Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro

2.2. Um dos amigos afirmou: "É sempre mais vantajoso alugar as bicicletas na empresa M porque pagam menos pelo uso do capacete".
Concordas com esta afirmação? Justifica a tua resposta.

Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro

2.3. Em qual das empresas deve o grupo de amigos alugar a bicicleta? Explica a tua resposta.

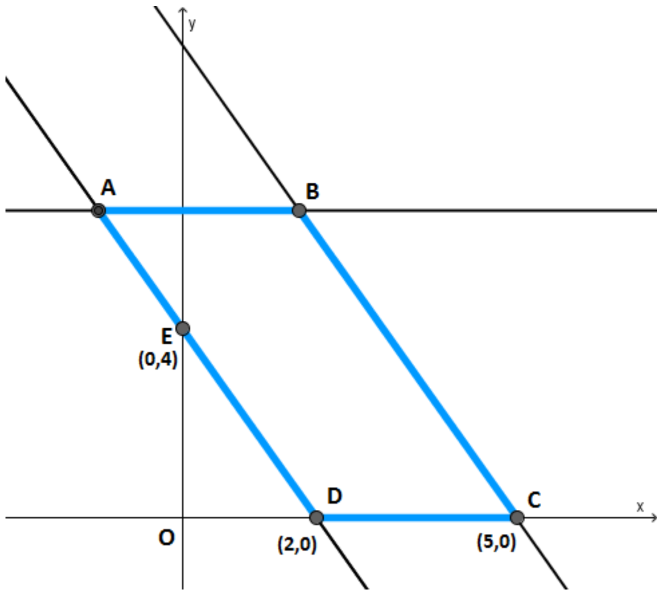
Caso utilizes o GeoGebra, grava todas as alterações que efetuares no ficheiro

Anexo 1.7. Ficha de Trabalho: Gráficos de Funções Afins

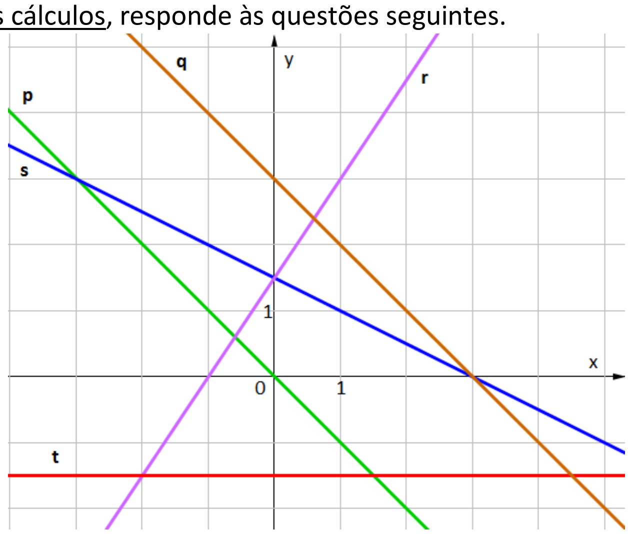
Matemática 8.º Ano	Data: 21.abril.2016 AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS Aluno:______________________ N.º: _____ Turma: _____
Ficha de Trabalho N.º _____	Gráficos de Funções Afins

Justifica o teu raciocínio em todas as respostas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

1. O Ricardo diz que sabe usar o que aprendeu nas aulas de Matemática sobre equações de retas para desenhar um paralelogramo. Observa a figura e indica como o Ricardo pode obter um paralelogramo com vértices A, B, C e D, usando o seu conhecimento sobre equações de retas.



2. Observa as retas da figura e, <u>sem efetuares cálculos</u>, responde às questões seguintes.



2.1. Indica, justificando, a(s) reta(s) da figura que têm declive:

(a) positivo.

(b) negativo.

(c) nulo.

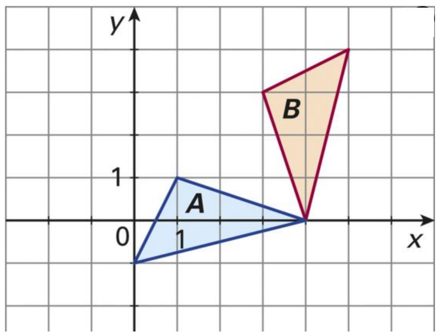
2.2. Sem efetuares cálculos, associa a cada uma das equações seguintes uma das retas p, q, r, s e t representadas no referencial acima.

(A) $y = -x$ (reta ___) **(B)** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___) **(C)** $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ (reta ___)

(D) $y = -\frac{3}{2}$ (reta ___) **(E)** $y = -x + 3$ (reta ___)

3. Considera os pontos $A(2,5)$, $B(8,-7)$ e $P(-3,9)$.
Escreve uma equação da reta paralela à reta AB e que passe pelo ponto P.

4. Escreve a equação do eixo de reflexão que transforma a figura geométrica A na figura geométrica B.



Adaptado do manual "Matemática 8"

Anexo 2 – Planificações

Anexo 2.1. Planificação 1.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 1.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 113 e 114 — 4 de abril de 2016

Sumário: Introdução do tema Funções. Noções de função, proporcionalidade direta e função linear.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Reconhecer uma função em diferentes representações
- Interpretar uma situação de proporcionalidade direta e reconhecer uma função de proporcionalidade direta como uma função linear
- Interpretar o gráfico de uma função, atendendo ao contexto

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto
- Reconhecer uma situação de proporcionalidade direta,
- Reconhecer gráficos de funções por troços (ou ramos)

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de trabalho n.º 1 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 1 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Introdução ao tema “Gráficos de Funções Afins”, articulação com conteúdos já trabalhados do 7.º e do 8.º ano e apresentação de um exemplo	15 min
3.º	Apresentação da ficha de trabalho n.º 1	5 min
4.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	15 min
5.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1	10 min
6.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	15 min
7.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 2	10 min

8.º	Síntese de conteúdos	5 min
9.º	Resolução de questões do Caderno de Atividades dos alunos, páginas 75 e 76	5 min
10.º	Encerramento da aula	5 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário. Uma vez que é a primeira aula do 3.º período, haverá espaço para alguns comentários relativos às férias e ao novo período escolar.

2.º - Introdução ao tema "Gráficos de Funções Afins" | 15 minutos

Para iniciar a subunidade "Gráficos de Funções Afins" a professora deverá fazer alusão aos tópicos do tema "Funções" do 7.º ano presentes no teste diagnóstico e referir que a aula irá centrar-se no recordar de alguns conceitos e aspetos que foram trabalhados no 7.º ano. Este será também o momento oportuno para chamar a atenção dos alunos sobre a importância do estudo desta subunidade para a resolução gráfica de sistemas de duas equações, que já trabalharam analiticamente.

Neste momento, com o objetivo de que todos os alunos se encontrem nas mesmas condições para o estudo desta subunidade, a professora projetará no quadro branco uma questão, a título de exemplo, que será resolvida e discutida em grande grupo. Nesta fase inicial da aula, a professora questionará os alunos sobre se a representação do diagrama de setas, apresentada, é uma função, questionando "O que é uma função?". Face às intervenções dos alunos a professora deverá sublinhar que a cada elemento do primeiro conjunto deve corresponder a um e um só elemento do segundo conjunto, concluindo-se que a representação é uma função, discutindo o facto de 3 não ser imagem de nenhum objeto à luz da definição de função.

As questões seguintes serão, do mesmo modo, discutidas em grande grupo com o objetivo de relembrar e clarificar os alunos acerca destes conteúdos. Durante esta interação a professora deverá atender aos resultados do teste diagnóstico, dando especial ênfase às notações utilizadas, procurando que os alunos as interpretem.

Após a discussão do exemplo, haverá lugar a uma pequena síntese destes conceitos: função, domínio, contradomínio, conjunto de chegada, objeto e imagem, que será projetada no quadro e que os alunos deverão registar no caderno diário.

3.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 1 | 5 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho, os alunos serão informados do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. Ao informar os alunos que o trabalho autónomo deverá ser realizado a pares, a professora deverá sublinhar a importância de justificarem todas as respostas e apresentarem sempre os cálculos auxiliares que efetuarem na ficha de trabalho, destacando que todas as respostas devem ser dadas nessa ficha que será recolhida no final da aula (para efeitos da investigação que é do conhecimento dos alunos) e devolvida na aula seguinte. Nesta ocasião, a professora irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos das fichas de trabalho e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima. Deverá ainda reforçar que o registo da correção deve ser feito pelos alunos no caderno diário e que, em circunstância alguma, deverão apagar o que escreveram na ficha de trabalho. Os alunos serão também informados que apesar do trabalho ser realizado a pares, todos os alunos receberão uma ficha de trabalho e cada um deverá dar a resposta na sua folha.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 15 minutos para a resolução da questão 1 e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Durante a resolução autónoma dos alunos e no momento de discussão a ficha de trabalho será projetada no quadro branco, sendo um auxílio, sobretudo, aquando a apresentação dos resultados.

4.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1 | 15 minutos

A professora circulará pela sala durante a realização da questão 1, com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades, privilegiando o questionamento, e de monitorizar o seu trabalho, acautelando também possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, promovendo a sua autonomia e entreajuda, evitando validar as suas respostas.

A professora deve atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro. Os aspetos mencionados estendem-se para os restantes segmentos de trabalho autónomo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** - Completar a tabela por observação do gráfico; - Observar os valores na tabela e completá-la, recorrendo ao preço de uma fotocópia; - Observar os valores na tabela e completá-la recorrendo à regra de três simples. **Dificuldades 1.1:** Não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, trocando, por exemplo, o número de fotocópias com o custo; - Ao adotarem a estratégia de completar a tabela através de cálculos, poderão apresentar dificuldades em aplicar a regra de três simples.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1.1:** - O que precisas conhecer para completar a tabela? Consegues retirar essa informação do gráfico? - Explica-me como pensaste. -Que dados estão indicados no gráfico? -O que representa o x? -O que representa o y?

	Estratégias 1.2: - Calcular o quociente entre os valores de y e os de x (ou entre os valores de x e os de y) e justificar a proporcionalidade pelo facto de a razão ser constante; - Justificar a proporcionalidade argumentando que o custo das fotocópias depende diretamente do número de fotocópias, ou seja, se multiplicarmos o custo das fotocópias por um certo valor, o número de fotocópias aumenta na mesma proporção; - Recorrer à representação gráfica e indicar que os pontos do gráfico estão “alinhados”, e que o custo aumenta com o número de fotocópias [e que a imagem de zero é zero]. **Dificuldades 1.2:** - Em recordar o que é ser diretamente proporcional; - Por exemplo, determinar a razão apenas entre 6 e 2, e 12 e 4, não contemplando os outros dados; -Não responder ao pedido.	**Apoio a prestar 1.2:** - Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? - Existe alguma relação entre o número de fotocópias e o seu custo? - Após os alunos referirem a existência de uma relação entre o número de fotocópias e o seu custo, a professora deverá questionar: O que significará o número de fotocópias e o custo serem diretamente proporcionais? - Qual é a constante de proporcionalidade? - Calculando o quociente apenas para esses valores como poderemos garantir que essa razão se mantém sempre?
	Estratégias 1.3: - Utilizar a constante de proporcionalidade e multiplicá-la por 998, $998 \times 3 = 2994$, respondendo que o custo é de 29,94 euros; - Recorrer a uma regra de três simples; **Dificuldades 1.3:** Não se antecipam grandes dúvidas mas os alunos poderão não dar a resposta na unidade pedida (euros).	**Apoio a prestar 1.3:** - O que pretendes determinar? - E se quisesses saber o custo de uma fotocópia? E de 10? -Lê novamente a questão. Em que unidades nos é pedido para dar a resposta? - Um euro corresponde a quantos cêntimos? E um cêntimo corresponde a quantos euros?
	Estratégias 1.4: Designar o número de fotocópias, por exemplo, por x, e o custo por y, recorrendo ao preço unitário (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $y = 3x$. **Dificuldades 1.4:** Nesta questão a dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o número de fotocópias e o custo das mesmas.	**Apoio a prestar 1.4:** - Como estão relacionadas as duas variáveis? - O gráfico permite-nos saber quanto custa uma fotocópia? E se quiséssemos saber o custo de número qualquer de fotocópias? - Olhando para a tabela, como se relaciona cada valor do custo com o número respetivo de fotocópias? - Qual é a constante de proporcionalidade? - Sugerir que nomeiem as variáveis pelas letras que se encontram no gráfico.
	Estratégias 1.5: **-** Usar a expressão algébrica da alínea anterior e resolve-la em ordem ao x (número de fotocópias), escrevendo $x = \frac{2500}{3}$ (ou $x = \frac{25}{0.03}$), e concluir que se poderão tirar, no máximo, 833 fotocópias, já que neste contexto n tem de assumir valores naturais; - Recorrer a uma regra de três simples, justificando que, se uma fotocópia custa 3 cêntimos, pretendem determinar o número de fotocópias que custa 2500 cêntimos. **Dificuldades 1.5:** Esta questão poderá representar mais dificuldades para os alunos por se tratar de um raciocínio inverso: - Ao resolver a equação em ordem a uma das variáveis;	**Apoio a prestar 1.5:** -O que pretendes determinar? -Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? -Existe alguma expressão que possas utilizar? Qual? - Apoiar o aluno na resolução da equação em ordem ao número de fotocópias, relembrando o que já trabalharam.

	- Na conversão de euros para cêntimos, ou vice versa, para efetuarem a divisão $25 \div 0.03$ ou $2500 \div 3$; - A interpretar o valor $833.(3)$, resultante da divisão, arredondando-o às décimas ou, arredondando-o por excesso às unidades; -Não apresentar resposta final; -Não responder à questão.	- Chamar a atenção para as unidades utilizadas na representação gráfica comparativamente aos 25 euros. - Poderás fazer 2,5 fotocópias? Qual será a resposta a esta questão?

5.º - Discussão em grande grupo da questão 1 | 15 minutos

A professora, após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Recordar as representações gráficas e tabular de uma função;
- Realçar como uma situação de proporcionalidade direta pode representar uma função de proporcionalidade direta, que por sua vez, é uma função linear;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** a primeira resolução a apresentar por um aluno oralmente (representando o par de alunos) deverá estar parcialmente correta para que possa ser uma situação exemplificativa de uma leitura incorreta do gráfico, e para que, neste caso, se possa fazer a leitura em grande grupo, tentando colocar todos os alunos nas mesmas condições. A professora deverá realçar que na leitura de um gráfico é fundamental identificar a que corresponde cada um dos eixos, salientando as noções de variável dependente e independente ao questionar, neste caso, qual é a variável independente e qual a variável dependente?

- **Discussão Q1.2:** solicitar a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresenta uma resposta incompleta, questionando se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma. Este momento terá também como objetivo que os alunos relembrem uma situação de proporcionalidade direta como uma situação em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, estando o aumento de uma relacionada com o aumento da outra. Deve ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

- **Discussão Q1.3:** a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma, questionando se alguém pensou de outro modo, com o objetivo de os alunos serem confrontados com outras estratégias. A professora deverá chamar particular atenção para a resposta a este problema que deve ser dada em euros.

- **Discussão Q1.4:** para a apresentação dos resultados desta questão, a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cuja expressão analítica não esteja correta, para que haja uma proveitosa discussão em grande grupo. Neste confronto entre as expressões analíticas obtidas, a professora deve garantir que será realçado o número de fotocópias como um número inteiro e positivo (natural). Aqui, a professora deverá questionar os alunos se esta representação é uma função, de forma a reforçar este conceito, devendo ainda sublinhar que esta é uma função de proporcionalidade direta e relembrar que também se designa por função linear. Tendo em conta as interações dos alunos, a professora poderá solicitar que os alunos deem outro exemplo de uma função linear.

- **Discussão Q1.5:** na apresentação de resultados desta alínea a professora deverá solicitar a um dos alunos que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresentam a resposta correta e que faz uma explicação à turma sobre a estratégia de resolução. Já que será espectável que esta questão representar mais dificuldades para a turma, a professora deve fazer uma explicação mais alargada, sublinhando que poderiam recorrer à expressão algébrica determinada na alínea anterior, reforçando, novamente, que o número de fotocópias terá de ser inteiro e como é importante dar uma resposta final a esta questão.

Este momento poderá ser oportuno para reforçar o conceito de função em três representações, gráfica, tabular e algébrica, questionando os alunos sobre que diferentes representações de função conhecem e como nas três representações se observa tratar-se de um função de proporcionalidade direta.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

6.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2 | 15 minutos

A professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
2	**Estratégias 2.1:** Por análise do gráfico, será expectável que os alunos respondam 10 horas. **Dificuldades 2.1:** Não são esperadas dificuldades já que a resposta resulta diretamente da leitura do gráfico, ainda assim, alguns alunos poderão fazê-la incorretamente. **Estratégias 2.2:** - Por análise do gráfico, concluírem que no momento em que estão parados a almoçar a distância percorrida não aumenta. **Dificuldades 2.2:** Não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, por exemplo, trocar as horas com a distância; - Ao não relacionarem a paragem com a função constante; - Ao indicarem o tempo total de paragem, por nesse período a distância percorrida não se alterar.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 2.1:** -Nesta situação, em que eixo observas as horas? -Que trajeto representa o gráfico? - No momento em que a Alice sai de casa que distância já percorreu? **Apoio a prestar 2.2:** - Sempre que se justifique a professora deverá remeter para a leitura do gráfico, já que esta questão é centrada na interpretação desta representação. - Que informação pretendes conhecer? -Em que eixo retiraste a informação necessária? -O que acontece à distância percorrida quando existe uma paragem?

	Estratégias 2.3: Por análise do gráfico, verificarem que durante o tempo que a família esteve parada, a distância percorrida manteve-se inalterada. Pelo que, como a função é contante das 12 até às 14 horas, a paragem para o almoço durou duas horas.	
	Dificuldades 2.3: Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Apesar disso, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, por exemplo, trocarem as horas com a distância; - Ao não relacionarem a paragem com a função constante; - Ao indicarem as horas a que pararam e as horas que retomaram a viagem;	**Apoio a prestar 2.3):** - Que informação pretendes conhecer? Que eixo te permitirá retirar essa informação? - Em que eixo retiraste a informação necessária? - O que acontece à distância percorrida quando a família pára para almoçar? - Em que parte do gráfico está representada a paragem para o almoço? - A que horas se iniciou a paragem? E a que horas foi retomada a viagem?
	Estratégias 2.4: Esta questão é de natureza mais aberta podendo surgir várias respostas: - [Por influência das alíneas anteriores] referem que não houve paragens durante as duas primeiras horas - Na 2ª hora (ou entre as 11 e 12) foram mais depressa do que na 1ª hora - Na 2ª hora percorrem o triplo da distância do que na primeira hora, e, portanto, viajaram a uma velocidade superior.	
	Dificuldades 2.4: - Na formulação da resposta e organização da linha de pensamento; - Na leitura e interpretação do gráfico, nomeadamente, associarem os valores da distância percorrida a valores de velocidade do automóvel ou a forma do gráfico à tipologia do terreno; - Ao relacionarem a inclinação das retas com a velocidade a que o carro circula.	**Apoio a prestar 2.4):** -Em que estão a pensar? - O que podes dizer sobre a 1º hora de viagem? E sobre a 2ª? - Existe alguma diferença na viagem nas duas primeiras horas? - Neste período, houve alguma paragem? - Que distância percorreram na primeira hora? E na segunda hora?
	Estratégias 2.5: - Por análise do gráfico, verificarem que a família chegou à Serra da Estrela às 15 horas e como saíram de casa às 10 horas, concluírem que demoraram cinco horas na viagem; - A partir do enunciado e da resposta à questão 2.1, concluírem que a viagem demorou cinco horas.	
	Dificuldades 2.5: Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica ou da leitura	**Apoio a prestar 2.5):** - Sempre que necessário, a professora deve remeter para a leitura do gráfico. -Que dados precisam conhecer para saber quanto tempo demorou a viagem?

	do enunciado. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico; - Ao não incluírem na resposta o tempo em que a família parou para almoçar. **Estratégias 2.6:** Por análise do gráfico, verificarem que a distância percorrida foi de $240\ km$. **Dificuldades 2.6:** Ainda que esta resposta resulte diretamente da interpretação do gráfico, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao realizar incorretamente a leitura do gráfico, por exemplo, trocar as horas com a distância percorrida; - Ao não relacionarem que o valor máximo da distância percorrida apresentada no gráfico, é a distância total que a Alice percorreu para chegar à Serra da Estrela.	-A que horas iniciou a família da Alice a viagem? - A que horas chegou a família da Alice à Serra da Estrela? **Apoio a prestar 2.6):** - O que pretendemos conhecer? -Em que eixo retiraste a informação necessária? -Que ponto do gráfico representa o momento que a família da Alice chegou à Serra da Estrela? -Nesse ponto, que informações é possível retirar?

7.º - Discussão em grande grupo da questão 2 | 10 minutos

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Trabalhar a leitura e interpretação de gráficos;
- Promover a comunicação e a escrita matemática.

Quando terminarem os momentos de trabalho autónomo, por parte dos alunos, a professora pedirá a um aluno (representativo do par de alunos) para apresentar oralmente a sua resposta à alínea 2.1., seguindo-se a resolução das alíneas 2.2 e 2.3 que serão explicadas oralmente no quadro, a partir do gráfico, por outro aluno que a professora irá escolher. Em seguida, a professora solicitará a outro aluno da turma indique oralmente aos colegas a sua resposta à alínea 2.4, chamando-o ao quadro para que possa ter o apoio do gráfico projetado. Seguir-se-á a apresentação da alínea 2.5, que será feita por um aluno, a pedido da professora, e, finalmente, outro aluno irá ao quadro apresentar oralmente a sua resolução da alínea 2.5**.** A escolha destes alunos (representativos do par), será feita com base no trabalho anteriormente realizado, a professora ao circular pela sala durante o momento de trabalho autónomo irá ver resoluções distintas e escolherá o aluno com base na resolução que poderá tornar a discussão mais apropriada à aprendizagem dos alunos. Se existirem diferentes resoluções, mas ambas importantes para este momento de discussão, a professora poderá pedir ao outro aluno para expor as diferenças da sua resolução oralmente, sendo que assim a turma beneficiará com a exposição de resoluções distintas.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, mas tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Neste segmento a professora deve destacar a influência da inclinação das retas ao longo do gráfico e o que representa essa mesma inclinação.

A professora no final deste segmento terá de se certificar que todos os alunos sabem interpretar corretamente um gráfico, podendo questionar alguns pontos importantes que são apresentados, "*Às 11h, qual a distância percorrida?*", "*Dado o valor da distância percorrida,* *como sabemos a que horas do dia corresponde?*", "*Um dos eixos do gráfico, pode não começar no 0? Porquê*?".

Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

8.º Síntese dos conteúdos | 5 minutos

Nos minutos dedicados à síntese, a professora questionará os alunos sobre o conceito de função e caso persistam dúvidas deverá apresentar mais exemplos. Este será o momento oportuno para discutir com os alunos diferentes tipos de representações que conheçam, nomeadamente, o diagrama de setas, a representação gráfica, a tabular e a expressão analítica. Ainda nesta sistematização, a professora deverá recordar o que foi trabalhado, salientando que uma situação de proporcionalidade direta pode ser traduzida por uma função linear, questionando os alunos: "*Que outro tipo de funções conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim.

9.º Resolução de questões do Caderno de Atividades | 5 minutos

Após o momento de síntese, se ainda restar algum tempo, os alunos realizaram em trabalho autónomo, a pares, as questões 1, 2.1, 2.2 e 2.3 da Ficha diagnóstica 5, do Caderno de Atividades (páginas 75 e 76), com o objetivo de recordar e consolidar os temas trabalhados no 7.º ano, e que serão fundamentais no desenrolar do estudo da subunidade "Gráficos de Funções Afins". Ao longo destes últimos minutos a professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos e, caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. Considerando os diferentes ritmos de trabalho dos alunos da turma, as questões que não ficarem concluídas em sala de aula, deverão ser realizadas como trabalho de casa.

10.º Encerramento da aula | 5 minutos

Neste último segmento da aula a professora informará os alunos do trabalho para casa, que por sua vez deverão fazer o registo no caderno diário. Este será também o momento oportuno para dar algumas informações acerca da sessão do Circo Matemático a que os alunos irão assistir.

Para trabalho de casa será proposto a conclusão das questões 1, 2.1, 2.2 e 2.3 da Ficha diagnóstica 5 das páginas 75 e 76 do Caderno de Atividades, e, eventualmente, a questão 3 da mesma ficha, considerando os diferentes ritmos de trabalho dos alunos.

Formas e momentos de avaliação:

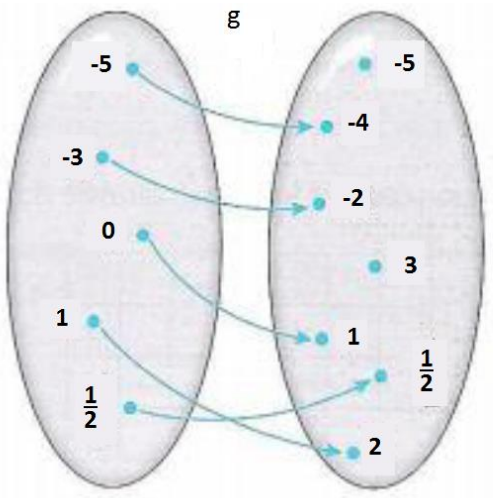
Esta aula será pautada por avaliação reguladora quer para a professora quer para os alunos. O primeiro caso, para que a professora possa identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que precisem ser melhor consolidados, por parte dos alunos. Através do questionamento a professora tentará aceder ao raciocínio dos alunos, bem como pela intervenção dos alunos na aula, assim como na forma de adesão à tarefa. Enquanto no segundo caso, ao circular pela sala entre os pares de alunos, durante o trabalho autónomo, a professora dará *feedback* aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Para além da avaliação reguladora, existirá o registo para avaliação sumativa da participação e intervenção dos alunos, através do preenchimento de uma grelha. Acrescentando ainda que as resoluções escritas solicitadas aos alunos constituirão elementos informativos à professora acerca da tarefa, isto para que possa ajustá-la em futuras utilizações. Ou seja, este último aspeto será um componente da avaliação formativa da professora.

Matemática 8.º Ano	Data: 4.abril.2016

Exemplo

O diagrama de setas da figura representa uma **função?**



Indica:

(a) O domínio de g.

(b) O contradomínio de g.

(c) O conjunto de chegada.

(d) O objeto que tem por imagem -2.

(e) A imagem do objeto 0.

(f) $g(-5) =$ _____.

(g) $g(\_\_\_) = 2$.

Síntese:

- Dados os conjuntos A e B, uma **função g** de A em B é uma correspondência que a cada elemento do conjunto A (domínio da função) corresponde um e um só elemento do conjunto B (conjunto de chegada).
- Cada elemento do conjunto A designa-se por **objeto**.
- Cada elemento do conjunto B, que corresponde a algum elemento do conjunto A, designa-se por **imagem**.
- O **domínio da função g** é o conjunto de todos os objetos e representa-se por D_g .
- O **contradomínio da função g** é o conjunto de todas as imagens e representa-se por D'_g ou CD_g .
- O **conjunto de chegada** é formado por todos os elementos do conjunto B (que tenham ou não correspondência com os elementos do domínio da função).

Anexo 2.2. Planificação 2.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 2.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lição 117 — 6 de abril de 2016

Sumário: Resolução da Ficha de Trabalho n.º 2: a função linear.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Interpretar uma situação de proporcionalidade direta
- Relacionar funções de proporcionalidade direta com funções lineares
- Interpretar a representação gráfica de uma função linear
- Reconhecer e interpretar a constante de proporcionalidade em múltiplas representações
- Reconhecer a imagem de 1 como coeficiente de x
- Resolver problemas com a função linear

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem, objeto
- Reconhecer uma função de proporcionalidade direta, uma função linear, afim ou constante

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de trabalho n.º 2 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 2 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Correção do trabalho de casa	5 min
3.º	Discussão de um exemplo e sistematização	8 min
4.º	Apresentação da ficha de trabalho n.º 2	3 min
5.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	10 min

6.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1 e síntese	13 min
7.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 4 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário.

2.º - Correção do trabalho de casa | 5 minutos

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação do que estudaram no 7.º ano.

Nesta discussão os alunos podem revelar dificuldades com a função afim pois ainda não foi recordada em sala de aula, no presente ano letivo. Caso se verifique, a professora deverá fazer uma breve explicação, já que o tema será explorado na aula seguinte.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

3.º - Discussão de um exemplo e sistematização | 8 minutos

A professora projetará no quadro branco uma questão, a título de exemplo, que será resolvida e discutida em grande grupo, com o objetivo de analisar as diferentes representações de uma função, observar diferentes representações de uma função de proporcionalidade direta e determinar objetos e imagens a partir da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta. A professora deverá questionar os alunos sobre o conceito de função e reforçar que a cada objeto corresponde uma única imagem. Nesta discussão, a professora deverá chamar particular atenção para o domínio onde a função está definida, assim como dar ênfase à constante de proporcionalidade nas diversas representações. Após a discussão do exemplo, a professora irá ditar uma pequena síntese das noções trabalhadas, nomeadamente, função de proporcionalidade direta.

4.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 1 | 3 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão trabalhar nos moldes da aula anterior.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 15 minutos para a resolução da ficha e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

5.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1 | 10 minutos

A professora circulará pela sala durante a realização da questão 1, com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando também possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** - Utilizar a noção de proporção, $\frac{0,6}{1}=\frac{16}{x}$ (onde x representa o número de pães), indicando que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim, obtêm $x=26,(6)$, concluindo que se podem comprar 26 pães; -Reconhecer que as grandezas são diretamente proporcionais e escrever uma expressão algébrica, como por exemplo $y=0.6x$, em que y representa o custo e x o número de pães. Concluindo que se podem comprar 26 pães; - Indicar que terão de dividir os 16 euros pelo custo de cada pão, obtendo $26,(6)$. Respondendo que poderão comprar 26 pães com 16 euros. - Recorrer ao método da tentativa e erro. **Dificuldades 1.1:** Esta questão pode levantar algumas dúvidas aos alunos já que a resposta não é direta. Alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Ao determinar o valor de x devido a erros de cálculo ou, por incorreta aplicação da regra de três simples ou da proporção; - Na conversão de cêntimos para euros, ou vice-versa; - Ao criticar o valor $26,(6)$, percebendo que apenas poderá comprar 26 pães; -Não apresentar resposta final; -Não responder à questão. **Estratégias 1.2:** - Para determinar o custo dos pães os alunos irão observar que o custo de um pão é 60 cêntimos, e multiplicar esse valor pelo número de pães. Neste caso irão calcular $0,6\times 10=6$, $0,6\times 52=31,2$ e $0,6\times 60=36$. Para determinarem a quantos pães corresponde um certo custo, os alunos deverão adotar as mesmas estratégias referidas na alínea anterior, obtendo que: 2 pães custam 1,2; e 23 pães custam 13,8. **Dificuldades 1.2:** Os alunos não deverão revelar muitas dificuldades a calcular o custo de um determinado número de pães, salvo, nas situações em que não realizem conversão de unidades.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, "*O que achas que é para fazer?*" **Apoio a prestar 1.1:** - Explica-me como pensaste. -Que dados estão indicados no enunciado? - O que pretendes conhecer? -Se tivesses 1 euro quantos pães poderias comprar? E se tivesses 3 euros? - Chamar a atenção para as unidades utilizadas no enunciado, comparativamente aos 16 euros. - Um euro corresponde a quantos cêntimos? E um cêntimo corresponde a quantos euros? - É possível comprar apenas uma parte de um pão? - Qual é a pergunta do enunciado? Já respondeste a essa questão? **Apoio a prestar 1.2:** Na alínea 1.2, o apoio a prestar aos alunos será semelhante ao da alínea anterior.

	Para calcular o número de pães comprados, conhecendo o seu custo, as dificuldades serão análogas às da alínea anterior.	
	Estratégias 1.3: Designar o número de pães, por exemplo, por p, e a função que representa o custo por $f(x)$, recorrendo ao preço unitário (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $f(x) = 0{,}6x$. **Dificuldades 1.3:** -Nesta questão a dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o custo e o número de pães comprados; - Alguns alunos poderão ainda indicar uma expressão correta, não nomeando a variável ou a função.	**Apoio a prestar 1.3:** - Como á relacionado o custo dos pães com o número de pães comprados? -Qual é a constante de proporcionalidade? - O enunciado permite-nos saber quanto custa um pão? E se quiséssemos saber o custo de número qualquer de pães? - Como é que varia o custo dos pães? Se comprar um pão quanto pago? E se comprar dois? - Sugerir que nomeiem as variáveis.
	Estratégias 1.4: Os alunos identificam o eixo das abcissas como referente ao número de pães comprados, e o das ordenadas como o custo (em euros), marcando os pontos (2; 1,2), (10; 6), (23; 13,8), (52; 31,2) e (60; 36), designando este gráfico por f. **Dificuldades 1.4:** - Ao identificar o número de pães como a variável dependente; - Escolher a escala dos eixos do referencial; - Não designar a função por f, ou não nomear os eixos; -Unir os pontos traçando uma reta.	**Apoio a prestar 1.4:** - Sugerir uma quadrícula como 5 unidades, para o número de pães e, como 2 unidades, para o custo. - Qual é a variável independente? E a dependente? -Podemos comprar 10,3 pães?
	Estratégias 1.4.1: -Indicar um dos pontos obtidos na tabela, relacionando desta forma que esses pontos pertencem à função; -Por observação do gráfico obtido retirar um ponto; - A partir do custo unitário ser 60 cêntimos, escolher um ponto proporcional, por exemplo, (2; 1,2). **Dificuldades 1.4.1:** Não são esperadas muitas dificuldades, mas algumas das dificuldades que podem surgir são: - Relacionar que todos os pontos que pertencem ao gráfico são solução; - Pensar que, para que um ponto para pertença, ao gráfico, basta pertencer à função e, portanto, satisfazer $f(x) = 0{,}6x$.	**Apoio a prestar 1.4.1:** - O que significa um ponto pertencer ao gráfico da função f? - O que é que já obtivemos nas alíneas anteriores? - Indica-me, no referencial, um ponto por onde o gráfico passe.
	Estratégias 1.4.2: Observar que não será possível comprar 70 pães porque, diariamente, a padaria apenas dispõe de 60 pães. **Dificuldades 1.4.2:** -Responder negativamente por (70;42) não se encontrar no gráfico, nem na tabela; -Recorrer à expressão algébrica, verificando a igualdade $42 = 0{,}6 \times 70$.	**Apoio a prestar 1.4.2:** - Nesta situação, o que significa o ponto (70;42)? -É possível comprar 70 pães? - Sugerir que o aluno releia o enunciado inicial.
	Estratégias 1.4.3: **-** Usar a expressão analítica da alínea anterior e resolve-la em ordem ao x (número de pães), escrevendo $x = \frac{4{,}5}{0{,}6} = 7{,}5$ (ou recorrendo aos valores em cêntimos), e concluir que não é possível metade de um pão, portanto a Alice não poderá pagar 4,5 euros pela comprar de pão; -Recorrer às estratégias utilizadas na alínea 1.1. **Dificuldades 1.4.3:**	**Apoio a prestar 1.4.3:** - O que pretendes determinar? - Existe alguma expressão que possas utilizar? Qual? - Apoiar o aluno na resolução da equação em ordem a uma das incógnitas. - É possível comprar só uma parte do pão?

	-Ao resolver a expressão em ordem a uma das variáveis; -Análogas às da alínea 1.1. **Estratégias 1.4.4:** **-** Os alunos irão indicar que é um gráfico de pontos que traduz o custo em função do número de pães comprados, e que representa uma situação de proporcionalidade direta. **Dificuldades 1.4.4:** Alguns alunos poderão não estar familiarizados com os gráficos de pontos, podendo surgir algumas dificuldades: - Caso tenham representado uma reta na alínea 1.6; - E não respondam à questão.	**Apoio a prestar 1.4.4:** - O que significa o ponto (2;1,2)? -Que situação representa este gráfico? -Se não forem comprados pães, qual é custo? -Esta representação é uma reta?

6.º - Discussão em grande grupo da questão 1 | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Recordar as representações gráfica, tabular e algébrica de uma função, em particular de uma função de proporcionalidade direta (atendendo especialmente ao seu domínio);
- Realçar como uma situação de proporcionalidade direta pode representar uma função de proporcionalidade direta
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, escrita e o raciocínio matemático.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** A professora pedirá a um aluno (como representante do par) que responda oralmente e explique aos colegas a sua resposta, questionando à restante turma se alguém obteve outro resultado, ou que não tenha conseguido resolver a questão. A professora deve garantir que todos os alunos acompanham o raciocínio mas não deve ser feita uma exploração exaustiva para não influenciar o raciocínio na alínea 1.2.

- **Discussão Q1.2:** A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresenta uma resposta incompleta, questionando se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma. A professora terá que se certificar que todos os alunos percebem o raciocínio quando é dado o número de pães, mas principalmente quando é dado o custo, pois espera-se mais dificuldades.

- **Discussão Q1.3:** A professora solicita a um dos alunos que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresentam a resposta correta e que faz uma explicação à turma sobre a estratégia de resolução. Já que é esperado que esta questão represente mais dificuldades, a professora deve fazer uma explicação mais alargada, reforçando que é uma função de proporcionalidade direta e, portanto, será da forma $y = kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade, dando destaque ao domínio desta função. Deve ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

- **Discussão Q1.4:** Um dos alunos é chamado pela professora ao quadro para marcar os pontos sobre a projeção do referencial, explicando como procedeu. A professora deverá sublinhar a que eixo está associada cada uma das variáveis, utilizando também a noção de variável dependente e independente.

- **Discussão Q1.4.1:** A professora deverá escolher um aluno para responder oralmente, pedindo para que explique aos colegas a obtenção da sua resposta. A professora também deve reforçar que existem 60 pares de pontos possíveis, pois o domínio da função são os números naturais até 60.
- **Discussão Q1.4.2:** A professora deve solicitar a um aluno que responda oralmente. Certificando-se que toda a turma percebe que apesar de, se comprarmos 70 pães pagaremos 42 euros, mas que a loja não tem 70 pães (não pertence ao domínio) e só por esta razão é que o ponto não pertence ao gráfico de f.
- **Discussão Q1.4.3:** Análoga à Q1.1.
- **Discussão Q1.4.4:** A professora solicitará a alguns alunos que indiquem as suas respostas oralmente, e depois deverá fazer uma explicação mais alargada, ao explicitar que é o gráfico de uma função de proporcionalidade direta uma vez que os pontos estão alinhados sobre uma reta imaginária que passa na origem do referencial. A professora deverá também destacar que $f(0) = 0$ e referir que f(1)=k, sendo k a constante de proporcionalidade.

Neste segmento a professora deve permanentemente questionar os alunos se existem dúvidas e se resolveram alguma das questões de outro modo, na tentativa de que todos os alunos participem na discussão dos resultados. No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

Nos minutos finais desta discussão a professora irá retomar o primeiro exemplo apresentado na aula (função de proporcionalidade direta), estendendo o domínio da função que os alunos trabalharam ($\boldsymbol{D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$) a $\mathbb{R}$. A professora tem como objetivo que os alunos recordem a função linear ao destacar que o conjunto dos pontos do gráfico (inicialmente apresentado) se sobrepõem a uma linha imaginária que passa na origem do referencial, e que, $f(0) = 0$ e f(1)=k, em que k é a constante de proporcionalidade. Finalmente, a professora ditará uma síntese acerca da função linear que os alunos deverão registar no caderno diário.

7.º Encerramento da aula | 2 minutos

Neste último segmento da aula a professora deverá devolver aos alunos as fichas de trabalho recolhidas na aula anterior, e relembrar aos alunos que não resolveram o trabalho de casa (da aula passada) que devem fazê-lo (a conclusão das questões 1, 2.1, 2.2 e 2.3 da Ficha diagnóstica 5 das páginas 75 e 76 do Caderno de Atividades).

Será ainda feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: a questão 3 da página 76 do Caderno de Atividades.

Formas e momentos de avaliação:

Esta aula será pautada por avaliação reguladora quer para a professora quer para os alunos, à semelhança da aula anterior. A professora tem como objetivo identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-a refletir sobre a sua própria prática e identificar aspetos que precisem ser melhor consolidados, por parte dos alunos. Através do questionamento a professora tentará aceder ao raciocínio dos alunos, bem como pela intervenção dos alunos na aula, assim como na forma de adesão à tarefa. Ao circular pela sala entre os pares de alunos, durante o trabalho autónomo, a professora dará *feedback* aos alunos, privilegiando o questionamento, para que estes se apercebam dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Na mesma linha da aula anterior, para além da avaliação reguladora, existirá o registo para avaliação sumativa da participação, intervenção dos alunos e realização do trabalho de casa, através do preenchimento de uma grelha. Acrescentando ainda que, as resoluções escritas solicitadas aos alunos constituirão elementos informativos à professora acerca da tarefa, ou seja, será um componente da avaliação formativa da professora.

Matemática 8.º Ano	Data: 6.abril.2016

Exemplo 2 - Uma função em diferentes representações

Situação A:

Considera a função com expressão algébrica $\boldsymbol{f(x) = 4x}$ e domínio $\boldsymbol{D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$.

I - Preenche a tabela com base na expressão algébrica da função f:

x	0	1	2	3	4	5
y						

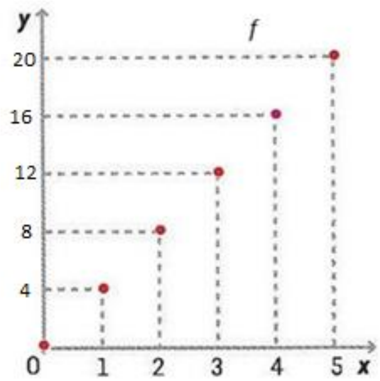
II - Indica:

(a) O contradomínio da função f.

(b) O objeto que tem imagem 16.

(c) $f(3) =$ ________ .

III – Como será a representação gráfica desta função?



Situação B

Considera a função com expressão algébrica $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x}$ e domínio $\boldsymbol{D_g = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$.

Indica:

(a) $g(4) =$ _____

(b) $g(\_\_\_\_) = \frac{3}{2}$

(c) $g(0) =$ ______

(d) O objeto que tem por imagem $\frac{1}{2}$.

(e) O contradomínio de g.

Anexo 2.3. Planificação 3.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 3.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lição 118 e 119 — 7 de abril de 2016

Sumário: Resolução da Ficha de Trabalho n.º3: a função afim.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Reconhecer o gráfico de uma função afim como a translação do gráfico de uma função linear segundo um vetor
- Reconhecer a imagem de um como coeficiente de x , dada uma função linear
- Identificar que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares
- Resolução de problemas com as funções linear e afim

Conhecimentos prévios dos alunos:

- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto
- Reconhecer uma função de proporcionalidade direta, uma função linear
- Determinar a constante de proporcionalidade

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro, marcador e régua	▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:

- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Correção do trabalho de casa	10 min
3.º	Apresentação da ficha de trabalho n.º 3	4 min
4.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	15 min
5.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1	15 min

6.º	Sistematização com o GeoGebra	10 min
7.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	15 min
8.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 2	15 min
9.º	Síntese dos conteúdos	5 min
10.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário.

2.º - Correção do trabalho de casa | 10 minutos

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, enquanto projeta a ficha no quadro. Todas as questões deverão ser discutidas em grande grupo:

- As alíneas 1.1 e 1.2 devem der discutidas oralmente enquanto a professora escreve as respostas no quadro. A professora deve atender especialmente aos casos em que, dado o custo, é necessário determinar o número de pães, pedindo aos alunos que partilhem as suas justificações. Deverão ser reforçadas as noções de variável independente e dependente, neste contexto.

- A alínea 1.3 deverá ser resolvida por um aluno no quadro e a sua resolução deve ser discutida em grande grupo. Nesta interação a professora deverá reforçar que esta é uma função de proporcionalidade direta e, portanto, será da forma $y = kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade, dando destaque ao domínio desta função. Deve ainda ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

- A alínea 1.4 deverá ser discutida oralmente, como o referencial projetado no quadro, e nestas interações a professora deverá sublinhar a que eixo está associada cada uma das variáveis, utilizando também a noção de variável dependente e independente.

- Na discussão oral da 1.4.1 um aluno deve explicar a sua resposta e a professora deve reforçar que existem 61 pares de pontos possíveis, pois o domínio da função são os números naturais até 60, incluindo o zero.

- Na discussão da 1.4.2, um aluno irá expor oralmente a sua resposta, explicando-a aos colegas. A professora deverá certificar-se que toda a turma percebe que, apesar de, se comprarmos 70 pães pagarmos 42 euros, na loja não existem tem 70 pães (não pertence ao domínio) e só por esta razão (o contexto da situação) é que o ponto não pertence ao gráfico de f.

- Um aluno deverá ir ao quadro apresentar a resposta à 1.4.3, explicando-a. A professora deverá recordar a expressão algébrica da função e frisar que seria uma possibilidade na resolução.

- Na discussão da 1.4.4 a professora solicitará a alguns alunos as suas respostas, fazendo depois notar que este é o gráfico de uma função de proporcionalidade direta uma vez que os pontos estão alinhados sobre uma reta imaginária que passa na origem do referencial. A professora deverá também destacar que $f(0) = 0$ e referir que f(1)=k, sendo k a constante de proporcionalidade.

Nos minutos finais desta discussão a professora irá retomar o primeiro exemplo apresentado na aula anterior (função de proporcionalidade direta), estendendo o domínio da função que os alunos trabalharam ($\boldsymbol{D_f} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$) a $\mathbb{R}$. A professora tem como objetivo que os alunos recordem a função linear ao destacar que o conjunto dos pontos do gráfico (inicialmente apresentado) se sobrepõem a uma linha imaginária que passa na origem do referencial, e que, $f(0) = 0$ e f(1)=k, em que k é a constante de proporcionalidade. Finalmente, a professora ditará uma síntese acerca da função linear que os alunos deverão registar no caderno diário, enquanto distribui a ficha de trabalho n.º 3.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

3.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 3 | 4 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão trabalhar nos moldes da aula anterior.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, que estará projetada no quadro, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 15 minutos para a resolução da ficha e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

4.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1 | 15 minutos

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** - Responder à questão por observação do gráfico, identificando 2,40€ como o custo de $3Kg$ de laranjas e 5,60€ como o custo de $4Kg$ de bananas. Obtendo $8€\ (2{,}40 + 5{,}60)$ como o custo total. **Dificuldades 1.1:** Não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos poderão indicar:	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1.1:** - Que informação consegues retirar do gráfico?

	- apenas o custo da quantidade de fruta, isoladamente, ao invés de somar os dois custos; - o custo da quantidade de fruta, por aproximação, conjeturando o valor por observação gráfica.	- O que pretendes saber? O cliente comprou só laranjas ou só bananas? - Tens a garantia que esse gráfico está feito à escala?
	Estratégias 1.2: - Calcular $\frac{5,60}{2}$, obtendo que o custo de 2Kg de bananas é 2,80€; e calcular $\frac{2,40}{2}$, obtendo que 0,80€ é o custo de 1Kg de laranjas. Finalmente, somar esses valores e indicar que 3,60€ será o custo de 2Kg de bananas e 1Kg de laranjas. - Em alternativa ao primeiro raciocínio poderão calcular $\frac{5,60}{4}$, obtendo que o custo de 1Kg de bananas é 1,40€; e calcular $\frac{2,40}{2}$, obtendo que 0,80€ é o custo de 1Kg de laranjas, resultando $2 \times 1,40 + 0,80 = 3,60$. **Dificuldades 1.2:** Análogas a 1.1.	**Apoio a prestar 1.2:** - O que pretendes saber? - Que informação consegues retirar do gráfico? -O cliente comprou só laranjas ou só bananas?
	Estratégias 1.3: - Utilizar uma proporção, por exemplo, $\frac{1}{0,8} = \frac{p}{6}$, em seguida multiplicar os extremos e igualar ao produto dos meios. -Tentativa e erro. **Dificuldades 1.3:** Esta questão poderá representar mais dificuldades para os alunos por se tratar de um raciocínio inverso: - Ao aplicar a regra de três simples; -Ao resolver a expressão em ordem ao peso (p). -Não apresentar resposta final/não responder à questão.	**Apoio a prestar 1.3:** - O que pretendes determinar? -Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste?
	Estratégias 1.4: Designar o peso por p, e o custo por c, recorrendo ao preço por quilograma (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $f(p) = 0,8p$ para as laranjas e $g(p) = 1,4p$ para as bananas. **Dificuldades 1.4:** -Generalização da relação entre o peso dos frutos e o custo dos mesmos; - Nomeação das variáveis e das funções.	**Apoio a prestar 1.4:** - Como estão relacionadas as duas variáveis? -Qual é o custo de um quilograma de laranjas/bananas? -E se quiséssemos saber o custo uma quantidade qualquer de laranjas/bananas? - Qual é a constante de proporcionalidade? - Sugerir que nomeiem as variáveis pelas letras que se encontram no gráfico, atendendo às designações das funções.
	Estratégias 1.5.a): - Referir que ambas as representações gráficas passam na origem do referencial e que são semirretas (ou que são pontos alinhados segundo uma reta); -Indicar que são funções lineares de constante igual ao preço por quilograma de laranjas/bananas; -Referir que o custo varia em função do peso, em ambas as funções f e g. **Dificuldades 1.5.a):** - Em expressar as semelhanças entre as funções. **Estratégias 1.5.b):** -Observar que a representação gráfica de g tem maior inclinação em relação ao eixo do xx que f (diferem na inclinação); - As suas expressões diferem na constante de proporcionalidade (ou na constante da função).	**Apoio a prestar 1.5.a) e b):** -Quais são as funções f e g? -Sugerir que observe o gráfico. -As funções f e g são de algum modo parecidas/distintas?

	Dificuldades 1.5.b): - Em expressar as semelhanças entre as funções.	
	Estratégias 1.6: -Responder que é falsa por f e g serem lineares (justificando pela expressão algébrica ou por observar que os gráficos passam na origem) -Indicar que não são constantes porque o custo aumenta com o peso; - Justificar que as retas não são horizontais. **Dificuldades 1.6:** -Em recordar o que é uma função constante; -Ao responder que a afirmação é verdadeira; -Não justificar.	**Apoio a prestar 1.6:** -Como é que estás a pensar? -Como é uma função constante? -O peso das laranjas/bananas é sempre o mesmo?
	Estratégias 1.7.a) e b): - Responder à questão por observação do gráfico, identificando $2{,}40$€ como o custo de $3Kg$ de laranjas e somar 2€ , obtendo $4{,}40$€. Finalmente, indicar na alínea b) que se pagará 2,40€, sem entrega ao domicílio, e que a diferença entre os valores pagos é de 2€. **Dificuldades 1.7.a):** -Ao apresentar o resultado sem somar os 2€ de custo fixo. **Dificuldades 1.7.b):** -Não são esperadas grandes dificuldades, a não ser que respondam incorretamente à alínea anterior.	**Apoio a prestar 1.7.a) e b):** -Nesta situação o cliente só paga o custo das laranjas? -Qual é o custo da entrega ao domicílio?
	Estratégias 1.7.c): - Designar o peso por p, e a função que representa o custo por $j(x)$, recorrendo ao preço por quilograma (ou à constante de proporcionalidade), adicionar os 2€ de custo fixo e escrever $j(x) = 0{,}8x$+2. **Dificuldades 1.7.c):** -A a dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o custo e a quantidade de fruta; - Alguns alunos poderão ainda indicar uma expressão incorreta, nomeando a variável por x, por exemplo.	**Apoio a prestar 1.7.c):** - Como estás a pensar? - Como á relacionado o custo das laranjas com a quantidade (em quilogramas) comprada? Só importa o peso da fruta? - Quanto custam 3Kg sem entrega ao domicílio? E com entrega? - Sugerir que nomeiem as variáveis de acordo com o observado no enunciada.
	Estratégias 1.8: Identificar o eixo das abcissas com o peso e o das ordenadas com o custo, identificar dois pontos que pertençam a cada uma das funções f e j, marcá-los e uni-los dois a dois. Os alunos poderão revelar cuidado ao marcar as semirretas, com a consciência que as funções estão definidas apenas para valores positivos ou nulos. **Dificuldades 1.8:** Esta questão poderá levantar algumas dificuldades, alguns alunos podem revelar dificuldades: - Ao representar a reta também para valores negativos; - Em identificar pontos para traçar as retas; -Ao nomear os eixos e/ou as representações; - Em definir uma escala para os eixos.	**Apoio a prestar 1.8:** -Qual é a variável dependente? E a independente? -Qual das representações corresponde ao custo com entrega ao domicílio? -Neste contexto, é possível termos custos negativos ou pesos negativos? - Sugerir, por exemplo, que duas quadrículas correspondam a uma unidade, em ambos os eixos.
	Estratégias 1.8.1: Os alunos poderão indicar que as retas são paralelas ou que têm a mesma inclinação.	**Apoio a prestar 1.8.1:** -Qual das representações corresponde ao custo, com entrega ao domicílio? Qual é o custo dessa entrega?

	Dificuldades 1.8.1: -Caso tracem mal as representações poderão tirar outras conclusões. **Estratégias 1.9:** Indicar que as funções f e j têm o mesmo coeficiente. **Dificuldades 1.9:** -Ao indicar que as funções f e j têm a mesma constante de proporcionalidade.	- Um cliente pagará o mesmo nas duas situações se comprar a mesma quantidade de laranjas? Porquê? **Apoio a prestar 1.9:** -As funções f e j são do mesmo tipo? Como se chama a uma função do tipo da f? E da j? - Que características semelhantes têm as expressões? Que características distintas apresentam?

5.º - Discussão em grande grupo da questão 1 | 15 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções lineares e afins
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** Um aluno apresenta oralmente a sua resposta, a pedido da professora, justificando-a. A leitura do gráfico, que estará projetado no quadro, deve ser reforçada em grande grupo e a professora deverá realçar a importância de identificar os eixos do referencial, questionando: *Qual é a variável independente? E a variável dependente?* Os alunos devem identificar o peso como a variável independente e o custo como variável dependente.

- **Discussão Q1.2:** Um aluno apresenta a resolução do par oralmente, explicando para toda a turma, enquanto a professora faz o registo da resposta no quadro. A professora questionará se alguém obteve outra resposta, com o objetivo de discutir outras estratégias, e deverá evidenciar que teremos de somar o custo das bananas e das laranjas (fazendo alusão ao conector e como indicador de soma).

- **Discussão Q1.3:** A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma, questionando se alguém pensou de outro modo, com o objetivo de discutir outras estratégias. Deverá ser dada particular atenção à resposta a esta questão, já que no contexto desta situação é possível comprar $7{,}5Kg$ de laranjas.

- **Discussão Q1.4:** Na apresentação dos resultados desta questão, a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cujas expressões analíticas estejam incompletas ou parcialmente corretas para que se possa discutir a constante de proporcionalidade em ambos os casos (laranjas e bananas). A professora deverá questionar os alunos se esta representação é uma função, de forma a reforçar este conceito, devendo ainda sublinhar que esta é uma função de proporcionalidade direta e relembrar que também é também uma função linear. Face às interações dos alunos poderão surgir logo conclusões das alíneas seguintes, como por exemplo, associar uma maior constante de proporcionalidade a uma maior inclinação da semirreta.

Discussão Q1.5.a) e b): Esta questão pode originar uma discussão rica em intervenções por parte dos alunos, já que poderá suscitar diversos comentários sobre as características gráficas ou algébricas das funções f e g. A professora deverá solicitar a dois ou três alunos que participem oralmente, de forma ordeira, e deve registar no quadro as intervenções dos alunos. No final, deverá ficar claro para os alunos que são ambas funções do tipo $h(x) = kx$ (em que k é a constante de proporcionalidade) com o mesmo domínio, que a representação gráfica mais inclinada está relacionada com uma maior constante de proporcionalidade e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções, isto é, ambas passam na origem do referencial. Reforçando que o coeficiente da função linear é igual ao ponto do gráfico com abcissa igual a 1, ie, é a imagem de f(1) e portanto f(1) é a constante de proporcionalidade.

- **Discussão Q1.6:** Outro aluno é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, a professora deverá em interação com os alunos destacar que para diferentes pesos o custo não é constante, recordando, nesse momento, as expressões algébricas indicadas anteriormente e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções. Para concluir, a professora deverá questionar se os alunos se recordam da designação que deram a funções daquele tipo no final da aula anterior.

- **Discussão Q1.7.a) e b):** A resposta a estas alíneas deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar o custo fixo, de dois euros, da entrega ao domicílio, a s sua influência no custo final.

- **Discussão Q1.7.c):** Ao pedir a um aluno que apresente a resolução no quadro, a professora deve assegurar que o aluno explica o raciocínio do par à turma. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para a nomeação das variáveis em causa, bem como para o facto de adicionarmos um valor fixo (constante) ao custo das laranjas. A professora deverá ter o cuidado de não explorar esta questão exaustivamente para não influenciar a resposta às alíneas seguintes, ainda assim, deverá questionar os alunos se se recordam que nome se dá a uma função daquele tipo, função afim.

- **Discussão Q1.8:** A professora chamará um aluno ao quadro para explicar a resolução do par, com a garantia que o aluno fez a representação de forma correta. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar a nomeação dos eixos (o eixo das abcissas representa o peso e o das ordenadas o custo), dando ênfase à escolha de pontos para traçar a semirreta. A professora deve questionar a turma: *"Como poderemos representar graficamente esta função?", "O que precisamos conhecer para traçar uma reta?".* Posto isto, as interações deverão ser no sentido de levar os alunos a perceber que precisam calcular a imagem de dois objetos distintos através da expressão algébrica (para cada uma das funções) obtendo dois pares ordenados. Ao marcar os referidos pares no referencial, que estará projetado no quadro, devem uni-los, atendendo ao domínio de cada função.

- **Discussão Q1.8.1:** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente, e a discussão deve ser mediada pela professora com o objetivo de observar que as semirretas são paralelas, ou seja, que as representações gráficas de f e j têm a mesma inclinação apesar de uma passar na origem do referencial e outra não. Este será o momento oportuno para que a professora questione: *Existe alguma transformação que nos permita partir da representação da função f para a j?* A professora deverá projetar um ficheiro GeoGebra com estas representações e mostrar, em interação com os alunos, que estas duas representações (com o auxilio de um seletor) são paralelas e que j resulta de f pela translação segundo o vetor $(0,2)$. Aqui a professora deve notar que a extremidade do vetor coincide com o ponto onde j interseta o eixo referente ao custo.

- **Discussão Q1.9:** Finalmente, a professora deverá questionar outro par de alunos relativamente às expressões algébricas de f e j. O par deverá explicar oralmente para a restante turma a sua justificação que poderá ser complementada com outras intervenções de alunos, a pedido da professora. A professora deverá chamar a atenção dos alunos o que difere nas duas expressões: a soma de uma constante, 2. Aqui, poderá ser oportuno evidenciar que a representação gráfica se "deslocou" duas unidades, isto é, o custo das laranjas com entrega ao domicílio aumenta dois euros no custo final, independentemente da quantidade que se comprar. Será natural que os alunos façam diversas questões, às quais a professora deverá responder, tentando não fugir do objetivo desta questão.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

6.º - Sistematização com o GeoGebra | 10 minutos

Ao articular este segmento com as funções f e j discutidas anteriormente, a professora deverá questionar: *Que nome dão a uma função que seja do tipo da f? E se for como a j?.* Face às interações dos alunos, a professora deverá recordar a função afim, pedindo aos alunos que registem no caderno diário esta noção, que será ditada. Antes de avançar será importante esclarecer as dúvidas que surjam.

Em seguida, a professora projetará no quadro um ficheiro GeoGebra com o intuito de que os alunos observem o gráfico de uma função afim, a partir de uma função linear, por translação de um vetor. A professora deverá tirar partido das potencialidades deste recurso para que os alunos observem o paralelismo entre estas duas retas. Assim, deve enfatizar que o gráfico de uma função linear passa no ponto de coordenadas (0,0), e o gráfico de uma função afim (paralela à linear) passa no ponto (0,b), [para valores positivos ou negativos de b].

Ainda neste segmento, a professora deverá referir que a função afim se obtém da linear, somando-lhe uma constante. Assim, deverá questionar: *Existirá a função constante? Como se representa?* A professora deve apresentar exemplos de funções constantes e ditar aos alunos a sua expressão geral, para que estes registem no caderno.

Depois de a professora reforçar estes aspetos deve questionar se existem dúvidas e pedir aos alunos que copiem para o caderno o texto do retângulo verde da página 166 do manual escolar.

7.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2 | 15 minutos

A professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
2	**Estratégias 2.1:** Completarem a tabela, utilizando os dados apresentados no enunciado: - O custo mensal do tarifário F é obtido através da soma do custo fixo com 12 cêntimos por minuto de conversação. Obtendo assim: $3 + 0{,}12 \times 45 = 8{,}4€$; $3 + 0{,}12 \times 90 = 13{,}8€$; $3 + 0{,}12 \times 223 = 29{,}76€$. - O custo mensal do tarifário G é obtido através da soma do custo fixo com 5 cêntimos por minuto de conversação.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 2.1:**

	Obtendo assim: $7 + 0{,}05 \times 30 = 8{,}5€$; $7 + 0{,}05 \times 90 = 11{,}5€$; $7 + 0{,}05 \times 223 = 18{,}15€$. **Dificuldades 2.1:** Não são esperadas dificuldades já que a resposta resulta de um cálculo direto. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Em perceber que para cada tarifário os valores são distintos; - Ao não fazerem a conversação do custo variável para euros. Calculando desta forma uma soma com duas unidades diferentes.	-Qual o custo do Tarifário F? E do tarifário G? - O que distingue um custo fixo de um custo variável? - Em que unidades está cada custo? - Em que unidades é pedida a resposta?
	Estratégias 2.2: - O custo depende do número de minutos e tal é observado na alínea anterior ao completar a tabela. Portanto, será expectável que os alunos respondam que a variável dependente é o custo e a variável independente é o número de minutos. **Dificuldades 2.2:** Não são esperadas muitas dificuldades. Ainda assim, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Na nomenclatura utilizada; - Trocarem as duas variáveis.	**Apoio a prestar 2.2:** - O que significa variável dependente? E variável independente? - O que vamos pagar depende do quê? - Como completamos a tabela anterior?
	Estratégias 2.3: Por observação da tabela da Questão 2.1, $g(30) = 8{,}5€$ e que será o custo do tarifário G com 30 minutos de conversação. **Dificuldades 2.3:** Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que a resposta resulta da observação da tabela. Ainda assim: - Ao relacionar que $g(30)$ é o custo de 30 minutos de conversação ao utilizar o tarifário G.	**Apoio a prestar 2.3):** - O que significa $g(30)$? - Qual é a função g? - O que já respondemos anteriormente?
	Estratégias 2.4: Esta questão relaciona linguagem corrente com matemática. Como tem um custo fixo, será esperado que os alunos respondam que são funções afins. **Dificuldades 2.4:** São esperadas algumas dificuldades. Tais como: - Saberem distinguir os três tipos de função; - Não relacionarem o custo fixo com a ordenada na origem; - Não conseguirem explicar a sua resposta.	**Apoio a prestar 2.4):** - O que é uma função constante? E linear? E afim? - O que significa ter um custo fixo?
	Estratégias 2.5: Após realizarem as questões 2.1 e 2.4, é expectável que os alunos respondam $f(x) = 3 + 0{,}12x$ e $g(x) = 7 + 0{,}05x$. **Dificuldades 2.5:** Na resolução desta alínea só são esperadas mais dificuldades se os alunos não tiverem respondido corretamente à alínea anterior. Algumas das dificuldades poderão ser: - Não saberem a expressão algébrica de uma função afim; - Não relacionarem o custo fixo com o *b* (termo independente) e o custo variável com o *a* (coeficiente de x).	**Apoio a prestar 2.5):** - Como é a expressão algébrica de uma função afim? - Que procedimentos utilizámos para completar a tabela? - Como obtemos o custo total? - O custo variável depende do quê?
	Estratégias 2.6.1:	

	Por análise da expressão algébrica: coeficiente de x é 0,12 e o termo independente é 3 **Dificuldades 2.6.1:** Não são esperadas dificuldades pois esta resposta sai por observação direta da expressão algébrica. Ainda assim poderão surgir dificuldades: - Ao colocar o coeficiente de x como 0,12*x* **Estratégias 2.6.2:** Por análise da expressão algébrica: coeficiente de x é 0,05 e o termo independente é 7. **Dificuldades 2.6.2:** Não são esperadas dificuldades pois esta resposta sai por observação direta da expressão algébrica. Ainda assim poderão surgir dificuldades: - Ao colocar o coeficiente de x como 0,05*x* **Estratégias 2.7:** Recorrendo às expressões algébricas, substituir em ambas o x por 75. Obtendo assim: -$f(75) = 3 + 0{,}12 \times 75 = 12€$ -$g(75) = 7 + 0{,}05 \times 75 = 10{,}75€$ Comparando as duas expressões algébricas, verem que o tarifário mais vantajoso será o tarifário G. Ou calculando de forma análoga à utilizada na questão 2.1. **Dificuldades 2.7:** Não são esperadas dificuldades, pois os alunos além de puderem recorrer à expressão algébrica, também poderão utilizar os dados do enunciado para responderem. A única dúvida esperada será a conversão de minutos para horas.	**Apoio a prestar 2.6):** - O que é o coeficiente de x? E o termo independente? **Apoio a prestar 2.7):** - Para podermos comparar o que temos de fazer primeiro? - Uma hora são quantos minutos?

8.º - Discussão em grande grupo da questão 2 | 15 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Recordar a terminologia: variável dependente, variável independente, coeficiente de x e termo independente.
- Recordar as funções constantes, lineares e afins e respetivas expressões algébricas;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q2.1:** Um aluno apresenta oralmente a sua resposta, a pedido da professora, justificando-a. A professora deve realçar a importância de um custo fixo e a sua diferença para um custo variável, questionando: *Qual é a diferença entre os dois tarifários? Que influência tem o custo fixo?*
- **Discussão Q2.2:** Solicitar a um aluno que responda oralmente, justificando a sua resposta. A professora deve questionar se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma e clarificar a diferença entre a variável dependente e independente.

- **Discussão Q2.3:** A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, pedindo para explicar à turma como procedeu. A professora deve certificar-se que toda a turma percebe a nomenclatura utilizada e o significado de $g(30)$.
- **Discussão Q2.4:** A professora deverá pedir a um aluno que diga a sua resposta oralmente, justificando a sua escolha. Neste momento é muito importante que a professora esclareça a diferença entre a função constante, linear e afim, podendo questionar a turma: *Que características têm estas funções? Qual expressão algébrica da função constante? E da função linear? E da função afim?*
- **Discussão Q2.5:** para a apresentação dos resultados desta questão, a professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cuja expressão analítica não esteja correta, para que haja uma proveitosa discussão em grande grupo. Aqui, a professora deverá reforçar, novamente, que é uma função afim, pois tem coeficiente de x e termo independente.
- **Discussão Q2.6:** a professora deverá pedir a dois alunos que digam as suas respostas oralmente, um para cada uma das funções, justificando a sua escolha. A professora deverá questionar a turma se houve respostas distintas, clarificando estas duas noções.

Discussão Q2.7: na apresentação de resultados desta alínea a professora deverá solicitar a um dos alunos que apresente a resolução do par no quadro, garantindo que apresentam a resposta correta e que faz uma explicação à turma sobre a estratégia de resolução. Este aluno, preferencialmente, terá optado por resolver a alínea utilizando a expressão algébrica. A professora poderá pedir a outro aluno que não tenha utilizado a mesma estratégia que responda oralmente, para desta forma ser possível comparar as duas resoluções e enriquecer a discussão.

9.º Síntese dos conteúdos	| 5 minutos

Nos minutos dedicados à síntese, a professora questionará os alunos sobre o tipo de funções que trabalharam na aula, relembrando a que a função afim se obtém a partir da linear, por soma de uma constante. Este será o momento oportuno que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas e, se necessário, a professora poderá retomar os exemplos anteriores com recurso ao GeoGebra para clarificar ideias. Para finalizar a professora deve questionar: "*Que tipos de função conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim. A professora deverá escrever uma expressão geral destas funções no quadro para que os alunos registem no caderno.

10.º Encerramento da aula	| 3 minutos

A professora deverá devolver aos alunos as fichas de trabalho recolhidas na aula anterior.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: a realização da Tarefa de Consolidação n.º 1, que deverá ser resolvida na ficha e entregue à professora na aula seguinte.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 2.4. Planificação 4.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 4.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 120 e 121 — 11 de abril de 2016

Sumário: Continuação da aula anterior: as funções linear, afim e constante.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Reconhecer o gráfico de uma função afim como a translação do gráfico de uma função linear segundo um vetor
- Reconhecer, dada uma função linear, a imagem de um como coeficiente de x
- Identificar que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares
- Interpretar a função linear e a função afim atendendo a diferentes contextos: resolução de problemas com recurso ao *software* GeoGebra
- Recordar as noções de declive e ordenada na origem

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto
- Reconhecer uma função de proporcionalidade direta e uma função linear
- Determinar a constante de proporcionalidade

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 3 ▪ Computador com o *software* GeoGebra ▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Material de desenho e escrita ▪ Guião do GeoGebra ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos a pares na sala de informática da escola.

Momentos da aula:

Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 90 minutos)

1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Continuação da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º 3	10 min
3.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1: continuação	10 min
4.º	Sistematização com o GeoGebra	20 min
5.º	Apresentação da Tarefa "Funções no GeoGebra"	7 min
6.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da Tarefa	20 min
7.º	Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa	10 min
8.º	Síntese dos conteúdos	5 min
9.º	Encerramento da aula	3 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Como o funcionamento dos computadores e do *software* GeoGebra será crucial para o desenvolvimento da aula, antes do início da mesma, a professora deverá acautelar o funcionamento destes dispositivos e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos, ditará o sumário e será apoiada pela colega de estágio na recolha do trabalho de casa e na distribuição da Ficha de Trabalho n.º3 (recolhida na aula anterior).

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão concluir a resolução da Ficha de Trabalho n.º 3 apenas durante 10 minutos, que será seguida da discussão em grande grupo, e que, na segunda metade da aula, cada par trabalhará numa tarefa, com recurso ao computador e ao *software* GeoGebra.

2.º - Continuação da resolução da questão 1 da ficha de trabalho n.º 3 | 10 minutos

Uma vez que a ficha de trabalho já foi resolvida e discutida até à alínea 1.4., os alunos deverão retomar a questão 1 na alínea 1.5..

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.5.a):** **-** Referir que ambas as representações gráficas passam na origem do referencial e que são semirretas (ou que são pontos alinhados segundo uma semirreta); -Indicar que são funções lineares de constante igual ao preço por quilograma de laranjas/bananas; -Referir que o custo varia em função do peso, em ambas as funções f e g. **Dificuldades 1.5.a):**	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?*

	- Em expressar as semelhanças entre as funções. **Estratégias 1.5.b):** -Observar que a representação gráfica de g tem maior inclinação em relação à parte positiva do eixo do xx que f (diferem na inclinação); - As suas expressões diferem na constante de proporcionalidade (ou na constante da função). **Dificuldades 1.5.b):** - Em expressar as semelhanças entre as funções.	**Apoio a prestar 1.5.a) e b):** -Quais são as funções f e g? -Sugerir que observe o gráfico. -As funções f e g são de algum modo parecidas/distintas?
	Estratégias 1.6: -Responder que é falsa por f e g serem lineares (justificando pela expressão algébrica ou por observar que os gráficos passam na origem) -Indicar que não são constantes porque o custo aumenta com o peso; - Justificar que as retas não são horizontais. **Dificuldades 1.6:** -Em recordar o que é uma função constante; -Ao responder que a afirmação é verdadeira; -Não justificar.	**Apoio a prestar 1.6:** -Como é que estás a pensar? -Como é uma função constante? -O peso das laranjas/bananas é sempre o mesmo?
	Estratégias 1.7.a) e b): - Responder à questão por observação do gráfico, identificando $2{,}40€$ como o custo de $3Kg$ de laranjas e somar $2€$, obtendo $4{,}40€$. Finalmente, indicar na alínea b) que se pagará 2,40€, sem entrega ao domicílio, e que a diferença entre os valores pagos é de 2€. **Dificuldades 1.7.a):** -Ao apresentar o resultado sem somar os 2€ de custo fixo. **Dificuldades 1.7.b):** -Não são esperadas grandes dificuldades, a não ser que respondam incorretamente à alínea anterior.	**Apoio a prestar 1.7.a) e b):** -Nesta situação o cliente só paga o custo das laranjas? -Qual é o custo da entrega ao domicílio?
	Estratégias 1.7.c): - Designar o peso por p, e a função que representa o custo por $j(x)$, recorrendo ao preço por quilograma (ou à constante de proporcionalidade), adicionar os 2€ de custo fixo e escrever $j(x) = 0{,}8x$+2. **Dificuldades 1.7.c):** -A dificuldade poderá residir na generalização da relação entre o custo e a quantidade de fruta; - Alguns alunos poderão ainda indicar uma expressão incorreta, nomeando a variável por x, por exemplo.	**Apoio a prestar 1.7.c):** - Como estás a pensar? - Como á relacionado o custo das laranjas com a quantidade (em quilogramas) comprada? Só importa o peso da fruta? - Quanto custam 3Kg sem entrega ao domicílio? E com entrega? - Sugerir que nomeiem as variáveis de acordo com o observado no enunciada.
	Estratégias 1.8: Identificar o eixo das abcissas com o peso e o das ordenadas com o custo, identificar dois pontos que pertençam a cada uma das funções f e j, marcá-los e uni-los dois a dois. Os alunos poderão revelar cuidado ao marcar as semirretas, com a consciência que as funções estão definidas apenas para valores positivos ou nulos. **Dificuldades 1.8:** Esta questão poderá levantar algumas dificuldades, alguns alunos podem revelar dificuldades: - Ao representar a reta também para valores negativos; - Em identificar pontos para traçar as retas;	**Apoio a prestar 1.8:** -Qual é a variável dependente? E a independente? -Qual das representações corresponde ao custo com entrega ao domicílio? -Neste contexto, é possível termos custos negativos ou pesos negativos? - Sugerir, por exemplo, que duas quadrículas correspondam a uma unidade, em ambos os eixos.

	-Ao nomear os eixos e/ou as representações; - Em definir uma escala para os eixos. **Estratégias 1.8.1:** Os alunos poderão indicar que as retas são paralelas ou que têm a mesma inclinação. **Dificuldades 1.8.1:** -Caso tracem mal as representações poderão tirar outras conclusões. **Estratégias 1.9:** Indicar que as funções f e j têm o mesmo coeficiente. **Dificuldades 1.9:** -Ao indicar que as funções f e j têm a mesma constante de proporcionalidade.	**Apoio a prestar 1.8.1:** -Qual das representações corresponde ao custo, com entrega ao domicílio? Qual é o custo dessa entrega? - Um cliente pagará o mesmo nas duas situações se comprar a mesma quantidade de laranjas? Porquê? **Apoio a prestar 1.9:** -As funções f e j são do mesmo tipo? Como se chama a uma função do tipo da f? E da j? - Que características semelhantes têm as expressões? Que características distintas apresentam?

3.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1: continuação|10 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções lineares e afins
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Relacionar funções lineares com funções afins
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q1.5.a) e b): Esta questão pode originar uma discussão rica em intervenções por parte dos alunos, já que poderá suscitar diversos comentários sobre as características gráficas ou algébricas das funções f e g. A professora deverá solicitar a dois ou três alunos que participem oralmente, de forma ordeira, e deve registar no quadro as intervenções dos alunos. No final, deverá ficar claro para os alunos que são ambas funções do tipo $h(x) = kx$ (em que k é a constante de proporcionalidade) com o mesmo domínio (números reais positivos), que o facto de o gráfico ter maior inclinação (relativamente à parte positiva dos eixo das abcissas) está relacionada com o facto da constante de proporcionalidade da função g ser superior à da f e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções, isto é, ambas passam na origem do referencial. Reforçar que o coeficiente da função linear é igual ao ponto do gráfico com abcissa igual a 1, isto é, é a imagem de f(1) e portanto f(1) é a constante de proporcionalidade.

- **Discussão Q1.6:** Outro aluno é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, a professora deverá em interação com os alunos destacar que para diferentes pesos o custo não é constante, recordando, nesse momento, as expressões algébricas indicadas anteriormente e que a imagem de 0 é 0, para ambas as funções. Para concluir, a professora deverá questionar se os alunos se recordam da designação que deram a funções daquele tipo no final da aula anterior.

- **Discussão Q1.7.a) e b):** A resposta a estas alíneas deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou, enquanto a professora deverá fazer o registo da resposta do aluno no quadro. Nesta discussão a professora deverá enfatizar o custo fixo, de dois euros, da entrega ao domicílio, e a sua influência no custo final.

- **Discussão Q1.7.c):** Ao pedir a um aluno que apresente a resolução no quadro, a professora deve assegurar que o aluno explica o raciocínio do par à turma. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para a nomeação das variáveis em causa, bem como para o facto de adicionarmos um valor fixo (constante) ao custo das laranjas. A professora deverá ter o cuidado de não explorar esta questão exaustivamente para não influenciar a resposta às alíneas seguintes, ainda assim, deverá questionar os alunos se se recordam que nome se dá a uma função daquele tipo, função afim.
- **Discussão Q1.8**: A resolução desta questão ficará a cargo da professora, que irá solicitar a intervenção dos alunos. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar a nomeação dos eixos (o eixo das abcissas representa o peso e o das ordenadas o custo), dando ênfase à escolha de pontos para traçar a semirreta. A professora deve questionar a turma: *"Como poderemos representar graficamente esta função?", "O que precisamos conhecer para traçar uma reta?".* Posto isto, a explicação da professora será no sentido de levar os alunos a perceber que precisam calcular a imagem de dois objetos distintos através da expressão algébrica (para cada uma das funções) obtendo dois pares ordenados. Ao marcar os referidos pares no referencial, que estará projetado no quadro, devem uni-los, atendendo ao domínio de cada função, e traçar as semirretas correspondentes aos gráficos das funções f e j. Para finalizar, a professora deverá questionar se os alunos têm dúvidas em como representar graficamente uma função, dada a sua expressão algébrica.
- **Discussão Q1.8.1:** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente, e a discussão deve ser mediada pela professora com o objetivo de observar que as semirretas são paralelas, ou seja, que as representações gráficas de f e j têm a mesma inclinação apesar de uma passar na origem do referencial e outra não. Este será o momento oportuno para que a professora questione: *Existe alguma transformação que nos permita partir da representação da função f para a j?* A professora deverá projetar um ficheiro GeoGebra com estas representações e mostrar, em interação com os alunos, que estas duas representações (com o auxilio de um seletor) são paralelas e que j resulta de f pela translação segundo o vetor $(0,2)$. Aqui a professora deve notar que a extremidade do vetor coincide com o ponto onde j interseta o eixo referente ao custo.
- **Discussão Q1.9:** Finalmente, a professora deverá questionar outro par de alunos relativamente às expressões algébricas de f e j. O par deverá explicar oralmente para a restante turma a sua justificação que poderá ser complementada com outras intervenções de alunos, a pedido da professora. A professora deverá chamar a atenção dos alunos no que difere nas duas expressões: a soma de uma constante, 2. Aqui, poderá ser oportuno evidenciar que a representação gráfica se "deslocou" duas unidades, isto é, o custo das laranjas com entrega ao domicílio aumenta dois euros no custo final, independentemente da quantidade que se comprar (para tal a professora deverá comparar dois ou três pontos nos dois gráficos, com a mesma abcissa. Será natural que os alunos façam diversas questões, às quais a professora deverá responder, tentando não fugir do objetivo desta questão.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

4.º - Sistematização com o GeoGebra	**| 20 minutos**

Ao articular este segmento com as funções f e j discutidas anteriormente, a professora deverá questionar: *Que nome dão a uma função que seja do tipo da f? E se for como a j?.* Face às interações dos alunos, a professora deverá recordar as funções lineares e afins. Antes de avançar será importante esclarecer as dúvidas que surjam.

Em seguida, a professora projetará no quadro um ficheiro GeoGebra com o intuito de que os alunos observem o gráfico de uma função afim, a partir de uma função linear, por translação de um vetor. A professora deverá tirar partido das potencialidades deste recurso para que os alunos observem o paralelismo entre estas duas retas. Assim, com exemplos concretos, a professora deve enfatizar que o gráfico de uma função linear passa no ponto de coordenadas $(0{,}0)$, e o gráfico de uma função afim (paralelo ao da função linear) passa no ponto $(0, b)$ [para valores positivos ou negativos de b], designando-se b por ordenada na origem. Como exemplo, a professora poderá questionar os alunos, *Dada a função linear* $t(x) = 12x$*, como posso obter uma função afim cujo gráfico seja paralelo a este e passe no ponto (0, 7)*? E, *dada uma função afim* $l(x) = 3x - 36$*, como posso obter uma função linear cujo gráfico seja paralelo?*

Ainda neste segmento, a professora deverá referir que a função afim se obtém da linear, somando-lhe uma constante. Assim, deverá questionar: *Existirá a função constante? Como se representa?* A professora deve apresentar exemplos de funções constantes e ditar aos alunos a sua expressão geral, para que estes registem no caderno.

Depois de a professora reforçar estes aspetos deve questionar se existem dúvidas e pedir aos alunos que, como trabalho de casa, copiem para o caderno noções das páginas 158 e 159, bem como o texto do retângulo verde da página 166 do manual escolar.

Ainda neste momento, em interação com os alunos, a professora deverá esclarecer que o gráfico de uma função afim é uma reta do tipo $y = ax + b$, em que a se designa por declive e b por ordenada na origem. A professora pedirá que os alunos, também como trabalho de casa, registem no caderno o 2.º retângulo verde da página 168 do seu manual escolar. Para culminar a professora deve enfatizar que uma equação do tipo $y = ax + b$ é designada por equação reduzida da reta. Assim, deverá questionar: $y = -9x + 66$ *pode ser a equação reduzida de uma reta? E* $y = 3x + 2 - 4 + 5$?, para enfatizar, que no último caso, teríamos de somar os termos semelhantes ou, no caso da equação $y - 4 = 8x - 2 + 3x$, teríamos de resolvê-la em ordem a y e somar todos os termos semelhantes.

5.º - Apresentação da Tarefa: "Funções no GeoGebra" | 7 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar que cada par de alunos irá trabalhar num computador, utilizando o *Software* de Geometria Dinâmica "GeoGebra", e que dispõem de um guião que contem os principais comandos para a utilização deste programa.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da tarefa, que estará projetada no quadro, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 20 minutos para a resolução da ficha e que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Nesta fase inicial, e uma vez que é o primeiro contacto dos alunos com este recurso, a professora deverá exemplificar no seu computador (que estará projetado) que pasta e que documento os alunos terão de abrir para iniciar a tarefa.

6.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da tarefa | 20 minutos

A professora circulará pela sala monitorizando o trabalho dos alunos, tentando promover a interação entre os pares de alunos e contará com o apoio da colega de estágio para as dificuldades que possam surgir ao nível do manuseamento do programa, por parte dos alunos.

Caso a professora verifique que os alunos estão de um modo geral com dificuldades na utilização do GeoGebra, deverá utilizar a projeção do seu computador e fazer uma explicação alargada a toda a turma, a título de exemplo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1.1:** Introduzir no campo "Entrada" as funções $a(x) = 8, f(x) = 3x$ e $h(x) = -7x + 6$. **Dificuldades 1.1:** Não são esperadas grandes dificuldades, pois os alunos têm o guião e apenas terão de introduzir as funções. Ainda assim, por ser o primeiro contacto com o recurso, alguns alunos poderão manifestar dificuldades: - Em perceber em que campo deverão introduzir as expressões algébricas. - Em escrever corretamente as expressões	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1.1:** - Onde devemos introduzir as expressões algébricas das funções? - O que diz o Guião? - Sugerir que veja o guião.
	Estratégias 1.2: Introduzir o ponto A=(6,-1) e o ponto B=(3,5) no campo "Entrada" e selecionar o botão ***Reta (Dois Pontos)***. De seguida clicar com o cursor esquerdo do rato sobre um dos pontos e depois clicar em cima do outro ponto. **Dificuldades 1.2:** Na resolução desta alínea não são esperadas muitas dificuldades já que no enunciado sugere recorrer ao Guião.	**Apoio a prestar 1.2:** - O que deves fazer primeiro? - Como se introduzem pontos? - O que diz o Guião?
	Estratégias 1.2.1: -Recorrendo ao Guião, os alunos irão observar a folha algébrica do GeoGebra e escrever na folha de resposta a equação $2x + y = 11$. - Recorrendo ao Guião, os alunos irão clicar no botão esquerdo do rato sobre expressão algébrica da equação da reta e selecionar a opção ***Equação*** $\boldsymbol{y = mx + b}$, escrevendo na folha de resposta $y = -2x + b$. **Dificuldades 1.2.1:** - Ao não identificar a equação da reta na Folha Algébrica do GeoGebra.	**Apoio a prestar 1.2.1:** - O que é pedido no enunciado? -Sugerir aos alunos que consultem o guião do GeoGebra na página 5.
	Estratégias 1.3.1: -Clicarem sobre a função f e arrastarem o seu gráfico, obtendo desta forma uma função paralela. - Introduzirem no campo "Entrada" uma função constante. -Observarem a Folha Algébrica e copiarem para o enunciado a nova expressão algébrica **Dificuldades 1.3.1:**	**Apoio a prestar 1.3.1:** - O que é uma função paralela?

	São esperadas algumas dificuldades. Tais como: - Não compreenderem o que é o gráfico de uma função ser paralelo ao gráfico de outra função. - Não saberem como traçar a reta paralela com recurso ao GeoGebra. **Estratégias 1.3.2:** -Análogas à Questão 1.3.1 - Introduzirem no campo "Entrada" uma função linear de coeficiente -7. **Dificuldades 1.3.2:** Análogas à Questão 1.3.1 **Estratégias 1.3.3:** -Identificar que uma função linear é do tipo $t(x) = ax$, em que a é uma constante e, selecionando um valor para a, escrever a função no campo "Entrada". **Dificuldades 1.3.3:** Análogas à Questão 1.3.1 - Não revelar espírito crítico caso a reta não passe na origem do referencial.	-Com recurso ao GeoGebra como conseguirás representar uma função paralela? -Consegues dar um exemplo de uma função constante? É paralela a a? **Apoio a prestar 1.3.2:** - O que é uma função linear? - Poderá intersetar o eixo das ordenadas no mesmo ponto que $h(x)$? Onde interseta o eixo yy? - A função h é uma função de que tipo? -Como é que obtemos a representação gráfica de uma função afim a partir de uma linear? Então como iremos obter uma função linear a partir da afim? **Apoio a prestar 1.3.3:** -Qua características tem uma função linear? - Com recurso ao GeoGebra como conseguirás representar uma função linear? -Consegues dar um exemplo de uma função linear diferente das que aí tens?

7.º - Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Observar a representação gráfica de funções constantes, lineares e afins.
- Reconhecer como traçar uma reta a partir de dois pontos
- Consolidar a noção de representação gráfica de uma função afim como translação de uma função linear
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Como foi trabalhar com o GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** A professora deve questionar se existiram dificuldades ao fazer estas representações com recurso ao GeoGebra, solicitando a um par de alunos que vá ao computador da professora explicar aos colegas como procedeu (sendo este procedimento projetado no quadro para que toda a turma possa observar). A professora deve questionar os alunos "*Que tipo de função é a $a(x)$, a $f(x)$ e a $h(x)$?*" e pedir que registem no caderno as expressões algébricas das funções a, f e h, anotando que são, respetivamente, função constante, linear e afim.
- **Discussão Q1.2:** Caso se tenham verificado dúvidas generalizadas na realização desta alínea, a professora deve solicitar a um aluno que se dirija ao seu computador e que explique aos colegas como resolver (sendo este procedimento projetado no quadro). Caso contrário, em interação com os alunos, a professora deverá frisar que o gráfico de uma função afim é uma reta, questionando *"Quantos pontos são necessários para traçar uma reta?",* com o objetivo

de que os alunos percebam que precisamos conhecer dois pontos. Na discussão desta questão será interessante que a professora questione dois alunos (representativos do par) e registe no quadro a equação da reta que cada um dos pares obteve, garantido que um dos pares indica a forma reduzida e o outro não. Aqui, a professora deverá questionar se todos obtiveram uma daquelas expressões, questionando a turma se as equações $2x + y = 11$ e $y = -2x + 11$ são distintas, com o objetivo de destacar a forma reduzida de uma equação.

- **Discussão Q1.3.1:** A professora deverá pedir a três alunos que digam a expressão da função, cujo gráfico é paralelo ao gráfico da função constante que traçaram, oralmente, e ficará encarregue de introduzi-las no ficheiro GeoGebra do seu computador como o objetivo de que todos os alunos vejam que as retas são todas paralelas.
- **Discussão Q1.3.2:** A professora solicitará a um aluno que vá ao seu computador explicar a sua resposta. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar que se o gráfico de uma função afim se obtém a partir do de uma linear, por translação segundo um vetor, também o gráfico de uma função linear se obtém por translação do gráfico de uma função afim. Ficará também a cargo da professora escrever a expressão algébrica da função h e da nova função, destacando que a ordenada na origem é 6, pelo que o gráfico da função afim se deslocou seis unidades para baixo, obtendo-se a função linear.
- **Discussão Q1.3.2:** a professora deverá pedir a três alunos que digam as expressões das funções que representaram, garantindo que são distintas, e registá-las no quadro. Em seguida, deverá analisar as expressões algébricas com os alunos, enfatizando que são do tipo ax (com a constante) e inserir no ficheiro GeoGebra do seu computador, projetando-o para fazer notar que todas passam na origem do referencial e que a imagem de 1 por cada uma das funções é a.

9.º Síntese dos conteúdos	| 5 minutos

Nos minutos dedicados à síntese, a professora questionará os alunos sobre o tipo de funções que trabalharam na aula, relembrando a que a função afim se obtém a partir da linear, por soma de uma constante. Este será o momento oportuno que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas e, se necessário, a professora poderá retomar os exemplos anteriores com recurso ao GeoGebra para clarificar ideias. Para finalizar a professora deve questionar: "*Que tipos de função conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim. A professora deverá escrever uma expressão geral destas funções no quadro para que os alunos registem no caderno.

10.º Encerramento da aula	| 3 minutos

A professora deverá recolher a Ficha de Trabalho n.º 3 e a Tarefa "Funções no GeoGebra" e informar que estas serão devolvidas na aula seguinte.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: a realização da questão 1 da página 79 do Caderno de Atividades e, como anteriormente referido, será pedido aos alunos para que registem no caderno diário as noções das páginas 158, 159 e 166 do manual escolar.

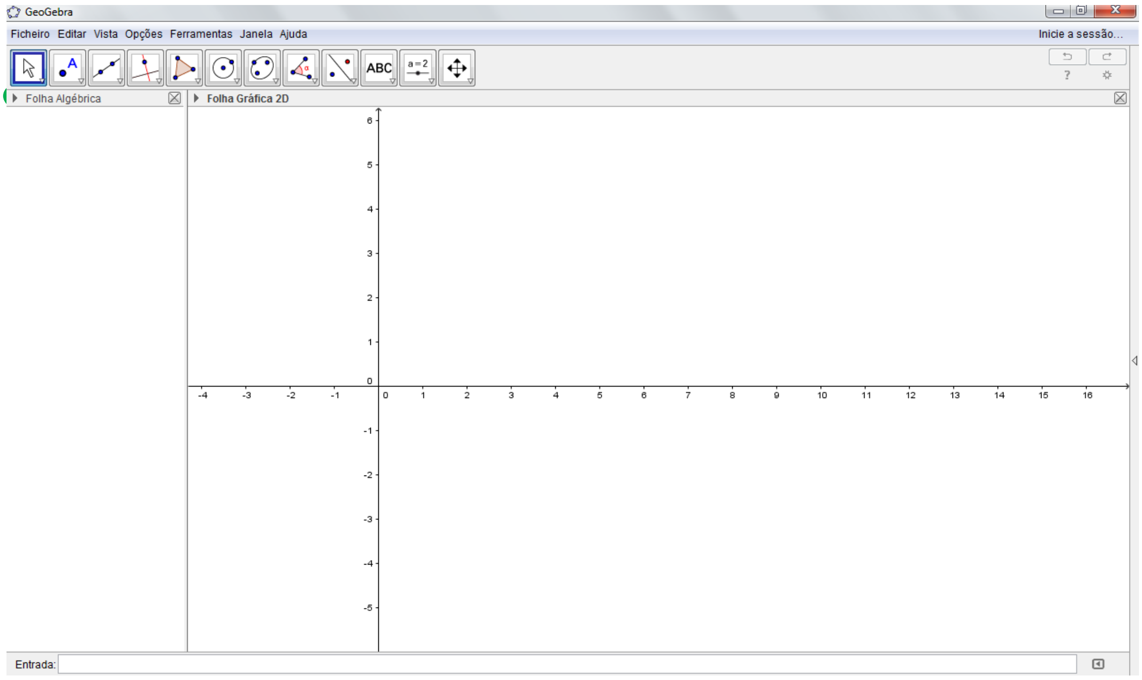
Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Matemática 8.º Ano	Aluno:________________________ N.º: ______ Turma: _____
	Guião GeoGebra

O GeoGebra é um programa que nos permite, por exemplo, marcar pontos, traçar retas, desenhar triângulos, desenhar circunferências e muito mais.

Ao abrires o GeoGebra é apresentada uma janela idêntica à da figura.



Se reparares a janela tem uma *Folha Algébrica* e uma *Folha Gráfica 2D*. Por exemplo, quando se introduz uma função, na *Folha Algébrica* aparece a sua expressão algébrica e, na *Folha Gráfica 2D,* a sua representação gráfica.

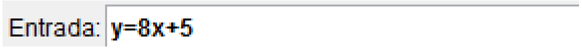
Inserir pontos, retas ou funções

A caixa de entrada permite inserir objetos na folha gráfica 2D, tais como funções ou pontos.

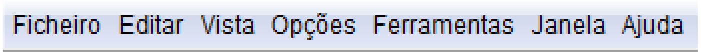
- Se quiseres **inserir um ponto,** por exemplo o ponto A de coordenadas (2,3;5,1), deves escrever na caixa ***Entrada*** A=(2.3,5.1) e clicar na tecla ***Enter.*** (Atenção: a vírgula de um número no GeoGebra representa-se por um ponto, tal como na calculadora).

- Se quiseres **<u>inserir uma função</u>**, por exemplo, $f(x) = 4x$, escreve a expressão na caixa ***Entrada*** e clica ***Enter***.

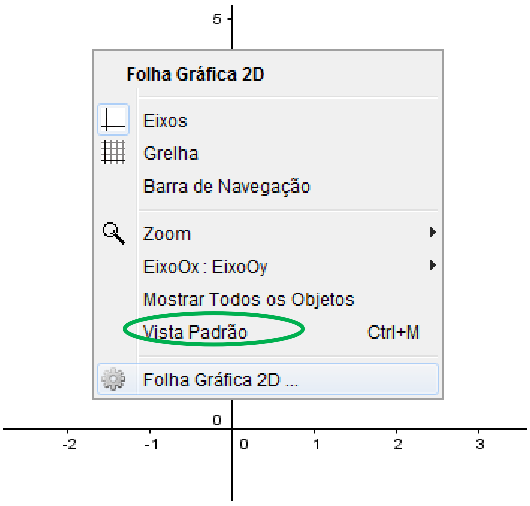
- Se quiseres **<u>inserir uma reta</u>**, por exemplo, $y = 8x + 5$, escreve a expressão na caixa ***Entrada*** e clica ***Enter***.



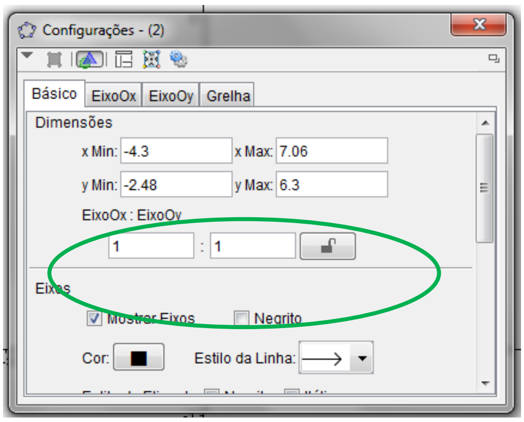
A barra seguinte tem botões que permitem efetuar várias operações como gravar ou aceder a algum ficheiro já existente, abrir ou fechar a *Folha Algébrica*, entre muitas outras opções.



Para a representação gráfica de funções pode ser útil **alterar as dimensões da *Folha Gráfica 2D,*** como a escala dos eixos. Para tal, com o cursor na *Folha Gráfica 2D,* clica com o botão direito do rato e seleciona a opção ***Folha Gráfica 2D***.

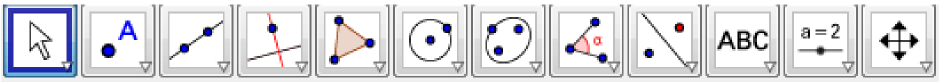


Depois abrirá uma janela como a seguinte, onde introduzirás os valores que pretendes para o x e para y.



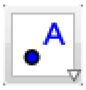
Em alternativa, podes ampliar ou reduzir as dimensões através do botão ***Arrastar a Folha Gráfica*** que será explicado de seguida.

Na janela principal do GeoGebra são apresentados vários **botões** em linha, sendo que em cada um desses botões ao clicar-se na seta do canto inferior direito são apresentados funcionalidades relacionados com a ação do botão original.

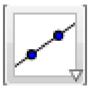


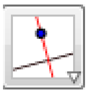
Para a tarefa que irás realizar é útil conheceres alguns exemplos dos comandos dos botões e as suas funcionalidades:

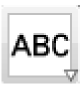
 **Botão *Mover*:** Permite selecionar os objetos e move-los;



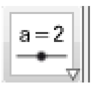
Botão *Novo Ponto*: Clicando sobre a ***Folha Gráfica 2D***, cria um ponto indicando automaticamente as suas coordenadas, tanto numa área livre como num gráfico, determina a interseção de dois objetos (por exemplo, a interseção de duas retas), calcula o ponto médio entre dois objetos;

 **Botão *Reta (Dois Pontos)*:** A partir de dois pontos, cria uma reta, segmento de reta, semireta, linha poligonal ou vetores;

 **Botão *Reta Perpendicular*:** A partir de uma reta e de um ponto, cria uma reta perpendicular, uma reta paralela, a mediatriz, a bissetriz e retas de regressão linear;



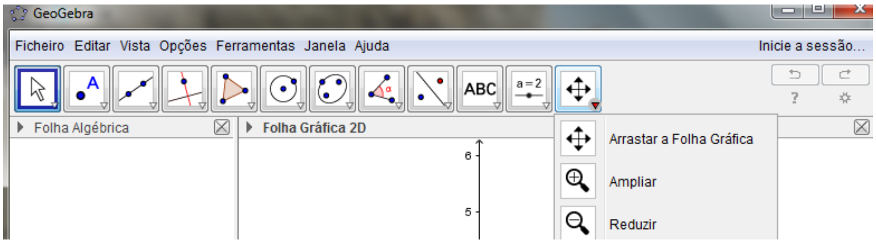
Botão *Inserir texto*: Pode-se inserir textos, mas também imagens.



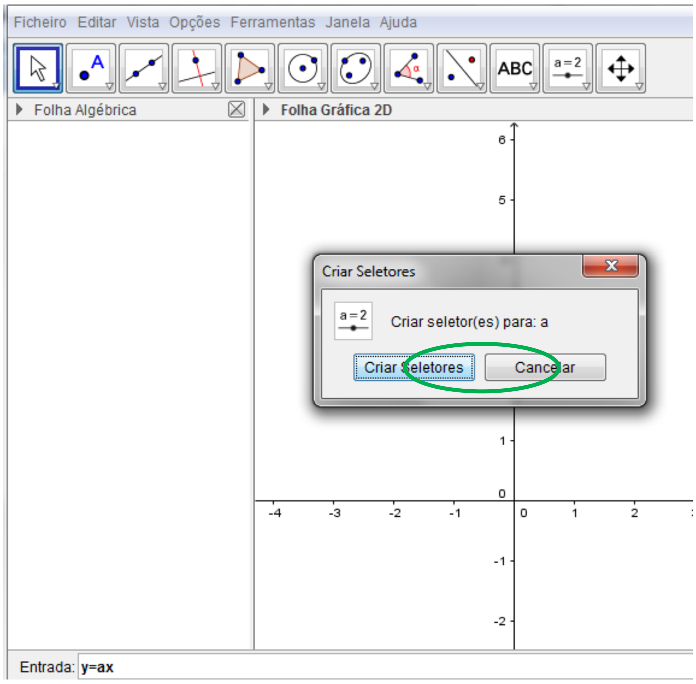
Botão *Seletor*: Permite escrever uma expressão no GeoGebra, como por exemplo, $f(x) = ax$ em que *a* pode ser um qualquer número real no intervalo que quisermos considerar.

 **Botão *Arrastar a Folha Gráfica*:** Ao clicares neste botão consegues arrastar a folha gráfica, ampliar e reduzir a mesma. Pode ser útil para alterar as dimensões do referencial.

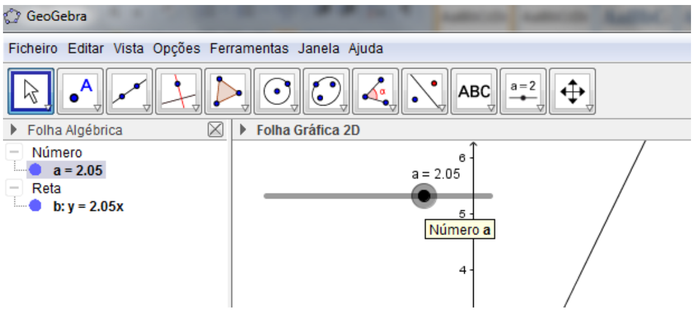
Para **ampliarmos, reduzirmos ou arrastarmos** a *Folha Gráfica 2D*, basta clicarmos no botão ***Arrastar a Folha Gráfica*** e clicar na opção que queremos.



Para **inserirmos uma equação do tipo** $y = ax$ (em que a é um valor qualquer diferente de 0), precisamos escrever esta equação na caixa ***Entrada*** e clicar ***Enter****.* De pois temos de selecionar a opção ***Criar Seletores***, como indica a imagem seguinte.



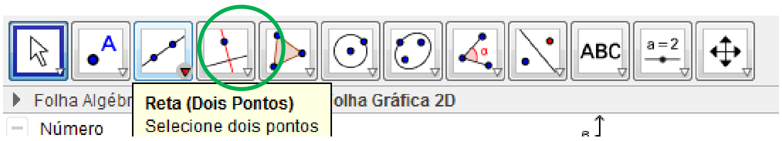
Neste caso, é criado o seletor *a*. Para **movermos o seletor** *a* é necessário premirmos o botão esquerdo do rato e arrastar para o valor que pretendemos. Como exemplifica a figura abaixo.



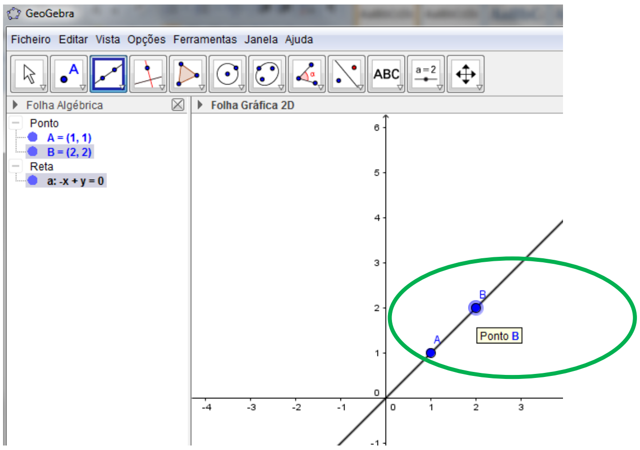
Para **inserirmos uma reta a partir de dois pontos** e obter a **equação da reta** devemos:

- inserir os pontos, um de cada vez, na caixa ***Entrada***

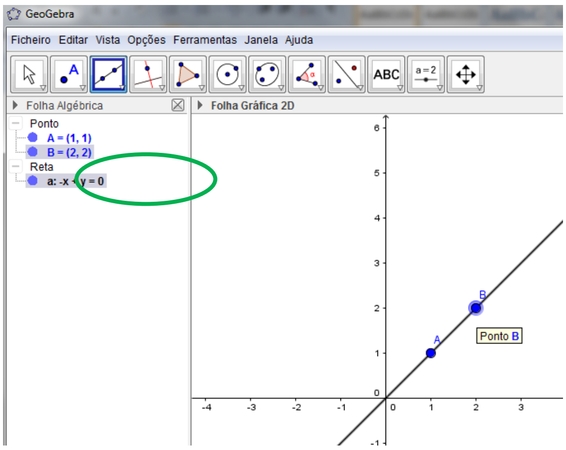
- selecionar ao botão ***Reta (Dois Pontos)***.



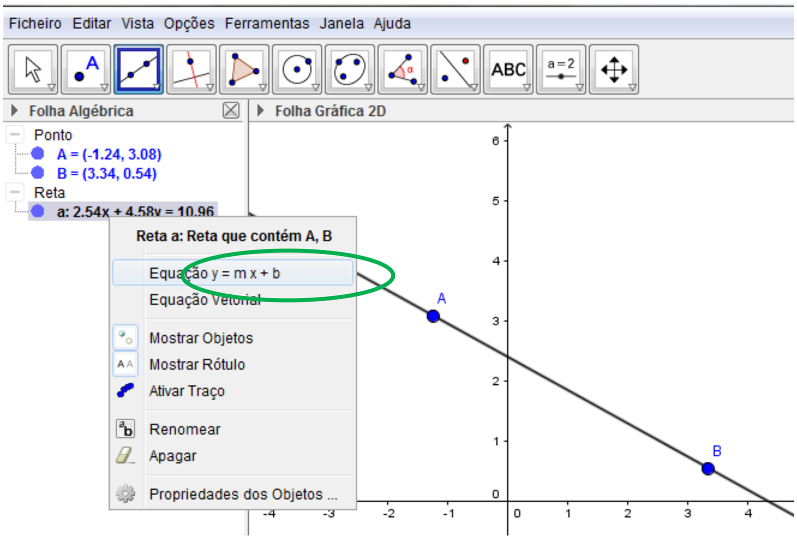
- de seguida deves clicar com o cursor esquerdo do rato sobre um dos ponto e depois clicar em cima do outro ponto (como na figura seguinte):



- repara que ao traçar a reta obtiveste a sua equação na folha algébrica.

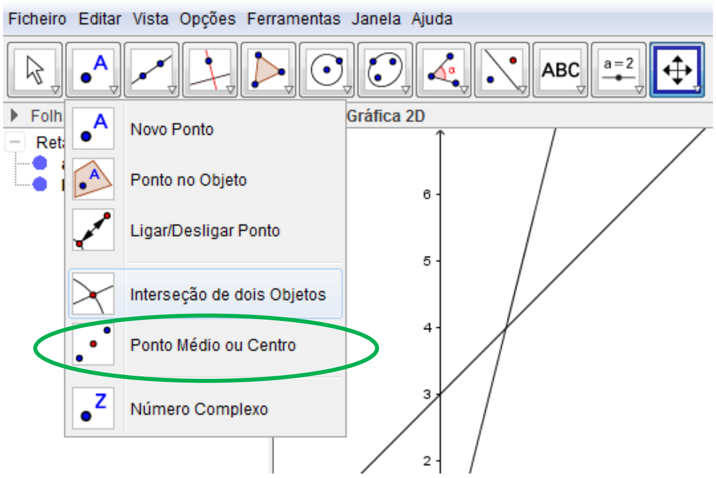


Obtendo a expressão algébrica de uma equação no GeoGebra, para a escrevermos na **forma** $y = mx + b$ é necessário clicar com o botão direito do rato na expressão da equação e selecionar a opção ***Equação*** $y = mx + b$.

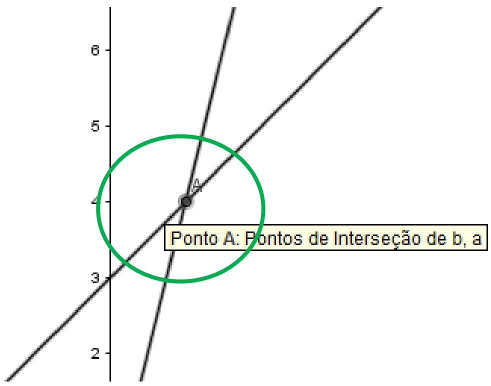


Para determinar a **interseção de duas retas** devemos:

- clicar sobre o botão *Novo Ponto* e em seguida escolher a opção "Interseção de dois objetos"

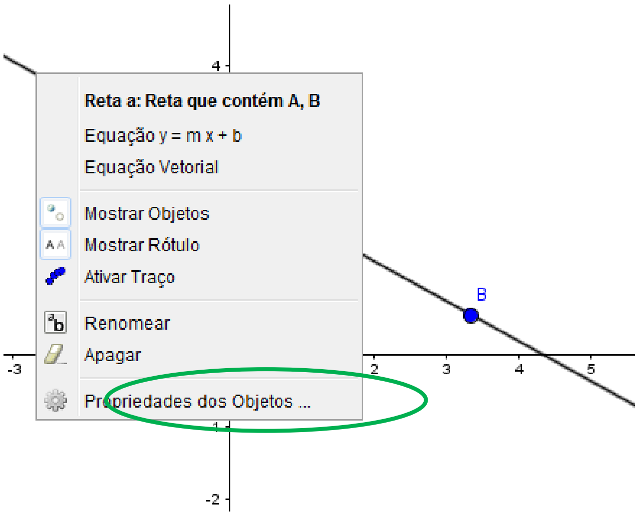


- clicar sobre as duas retas que pretendemos determinar a interseção. Repara que depois irá aparecer o ponto onde as duas retas se intersetam



🖰 **Alterar cor, nome e propriedades dos pontos, retas**

Na *Folha Gráfica 2D* ou na Folha Algébrica, ao clicar com o botão direito do rato sobre o objeto (ponto, reta, …) é possível alterar o seu nome, a sua cor, entre outros. Para isso seleciona ***Propriedades dos Objetos***.



Anexo 2.5. Planificação 5.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 5.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 122 13 de abril de 2016

Sumário: Continuação da aula anterior.
Resolução de exercícios do manual escolar: Gráfico de uma função afim.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Consolidar as noções de declive e ordenada na origem
- Consolidar a noção de gráfico de uma função afim como translação de uma função linear, e reciprocamente
- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Representar algebricamente uma função afim, dada a representação gráfica de uma função linear com o mesmo coeficiente.
- Determinar a interseção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto, declive e ordenada na origem
- Reconhecer as funções constante, linear e afim
- Calcular objetos e imagens de uma função, dada a sua expressão algébrica ou a sua representação gráfica

Recursos para o professor:	**Recursos para o aluno:**
▪ Manual escolar ▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Quadro e marcador	▪ Tarefa "Funções no GeoGebra" ▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar ▪ Folhas quadriculadas

Metodologia de trabalho:
- Introdução do trabalho a realizar, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

Momentos da aula		**Tempo previsto** (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa "Funções no GeoGebra" e sistematização	15 min

3.º	Trabalho autónomo na resolução das questões 1 e 2 do manual escolar, página 169	5 min
4.º	Discussão em grande grupo e resolução no quadro das questões 1 e 2	5 min
5.º	Trabalho autónomo na resolução da questão 3 do manual escolar, página 169	8 min
6.º	Discussão em grande grupo da questão 3 do manual escolar, página 169	6 min
7.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 4 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário, enquanto contará com a colaboração da colega de estágio para o registo dos alunos que realizaram o trabalho de casa, para a distribuição das tarefas "Funções no GeoGebra" e de folhas quadriculadas (onde os alunos farão os seus registos escritos nesta aula).

2.º - Discussão em grande grupo e resolução da Tarefa e sistematização | 15 minutos

A professora deverá começar por questionar os alunos "*Que tipos de função conhecem? Que tipos de função vimos na aula anterior?*", como o objetivo que se recordem das designações de função constante, linear e afim, articulando com a discussão da alínea 1.1 da tarefa da aula anterior,

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Observar a representação gráfica de funções constantes, lineares e afins.
- Reconhecer como traçar uma reta a partir de dois pontos
- Consolidar a noção de representação gráfica de uma função afim como translação de uma função linear
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, consolidando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Como foi trabalhar com o GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q1.1:** Como a grande maioria dos alunos resolveu esta questão, a professora deve apenas questionar se existiram dificuldades ao fazer estas representações com recurso ao GeoGebra. A professora deve questionar os alunos "*Que tipo de função é a $a(x)$, a $f(x)$ e a $h(x)$?*" e pedir que registem no caderno as expressões algébricas das funções a, f e h, anotando que são, respetivamente, função constante, linear e afim.
- **Discussão Q1.2:** Nesta questão alguns alunos não marcaram bem os pontos, por isso, obtiveram a equação de uma reta diferente da que se pretendia, pelo que, este aspeto terá maior destaque nesta discussão. Em interação com os alunos, a professora deverá frisar que o gráfico de uma função afim é uma reta, questionando *"Quantos pontos são necessários para traçar uma reta?"*, com o objetivo de que os alunos digam que precisamos conhecer dois pontos. Aqui, a professora deverá recorrer ao GeoGebra para mostrar que um só ponto não é suficiente para definir uma reta, por exemplo, questionando "*Quantas retas podem passar num ponto?"*. Assim, com recurso ao GeoGebra, a professora traçará diversas retas (distintas) que passam num mesmo

ponto e, posteriormente, deverá questionar *"E se tiver dois pontos? Podem passar duas retas distintas por esses pontos?".* Ao marcar dois pontos distintos com recurso ao GeoGebra, e ao traçar a reta que os contém, os alunos deverão observar que, se tiver dois pontos distintos, tenho uma única reta que os contém. Para prosseguir na discussão desta questão será interessante que a professora questione dois alunos (representativos do par) e registe no quadro a equação da reta que cada um dos pares obteve, garantido que um dos pares indica a equação de uma reta diferente da que passa nos pontos em questão. Aqui, o objetivo será salientar que nesta última situação os pontos não foram bem marcados, caso contrário as retas seriam as mesmas (a professora deverá traçar estas retas no GeoGebra, para exemplificar). Finalmente, em interação com os alunos, a professora deverá resolver no quadro a equação $2x + y = 11$ em ordem a y, com o objetivo de destacar que $y = -2x + 11$ é a equação reduzida da reta (por ser da forma $y = ax + b$), enfatizando que -2 é o declive da reta, e 11 a ordenada na origem.

- **Discussão Q1.3.1:** A professora deverá pedir a três alunos que indiquem a expressão da função, cujo gráfico é paralelo ao gráfico da função constante que traçaram, oralmente, e ficará encarregue de introduzi-las no ficheiro GeoGebra do seu computador como o objetivo de que todos os alunos vejam que as retas são todas paralelas. Com o objetivo de que os alunos consolidem a noção de função constante, a professora deverá pedir aos alunos as coordenadas de dois ou três pontos do gráfico de uma das funções constantes representadas (por exemplo $a(x) = 8$) e registá-las no quadro. Assim, em interação com os alunos, a professora deverá sublinhar que a ordenada desses pontos será sempre a mesma (neste caso, 8).
- **Discussão Q1.3.2:** A professora solicitará a um aluno que vá ao seu computador explicar a sua resposta. Aqui, em interação com os alunos, a professora deverá destacar que tal como o gráfico de uma função afim se obtém a partir do de uma linear, por translação segundo um vetor, também o gráfico de uma função linear se obtém por translação do gráfico de uma função afim. Ficará ainda a cargo da professora escrever a expressão algébrica da função h e da nova função, destacando que a ordenada na origem é 6, pelo que, se o gráfico da função afim se deslocar seis unidades para baixo, obtém-se a representação gráfica da função linear.
- **Discussão Q1.3.2:** A professora deverá pedir a três alunos que digam as expressões das funções que representaram, garantindo que são distintas, e registá-las no quadro. Em seguida, deverá analisar as expressões algébricas com os alunos, enfatizando que são do tipo ax (com a constante), e inseri-las no ficheiro GeoGebra do seu computador, projetando-o, para fazer notar que todas passam na origem do referencial e que a imagem de 1 por cada uma das funções é a - ou seja, é uma função linear.

Para sintetizar, a professora questionará os alunos sobre o tipo de funções que trabalharam na aula, relembrando a que a função afim se obtém a partir da linear, por soma de uma constante. Este será o momento oportuno que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas. Para finalizar este segmento, a professora deve questionar: "*Que tipos de função conhecem?",* com o objetivo de que os alunos se recordem das designações de função constante, linear e afim. A professora deverá escrever uma expressão geral destas funções no quadro para que os alunos registem no caderno.

3.º - Trabalho autónomo na resolução das questões 1 e 2 do manual escolar, página 169| 5 minutos

A professora deve informar os alunos que irão trabalhar a pares e que deverão resolver as questões do manual propostas nas folhas quadriculadas que lhes foram entregues no início da aula, escrevendo o seu nome e número. Ficará também a cargo da professora recordar que não deverão apagar qualquer registo e lembrar que no final da aula irá recolher as folhas quadriculadas.

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Os aspetos mencionados estendem-se para os restantes segmentos de trabalho autónomo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 1:** Como as três retas são paralelas terão todas o mesmo declive. - Relacionar que a ordenada do ponto R é a ordenada na origem da reta *r* e como tal a expressão algébrica será $f(x) = 0{,}8x + 1{,}2$. De modo análogo a expressão algébrica da função h será $h(x) = 0{,}8x - 0{,}6$. - As retas *r* e *t* são obtidas a partir da translação segundo um vetor (0,b) da reta s. A reta *r* é obtida segundo o vetor (0; 1,2) e a reta *t* é obtida segundo o vetor (0;-0,6). E, portanto, as respetivas expressões algébricas serão $f(x) = 0{,}8x + 1{,}2$ e $h(x) = 0{,}8x - 0{,}6$. **Dificuldades 1:** -Interpretar o enunciado. - Em associar a reta r à função f, a reta s à função g, e a t à h. - Ao não identificar g como função linear e f e h como afins. - Ao não reconhecer que r se obtém de s por translação segundo o vetor (0;1,2), e que t se obtém de s por translação segundo o vetor (0;-0,6). -Em perceber que como r, s e t são retas paralelas, o coeficiente das respetivas funções é o mesmo.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1:** - A reta *r* corresponde ao gráfico de que função? E a reta *t?* E a *s?* - O que significa as três retas serem paralelas? - Qual é o coeficiente de *x* da função g?
2	**Estratégias 2:** Relacionar que o declive é o valor do coeficiente de x da função e a ordenada na origem é o valor da ordenada do ponto de coordenadas (0,1), ou o valor da interseção da reta com o eixo das ordenadas. A expressão algébrica será $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. **Dificuldades 2:** - Interpretar o enunciado. - Em relacionar que o declive é o valor do coeficiente de x. - Em relacionar que a ordenada na origem é o valor da ordenada do ponto de coordenadas (0,1) ou que é o valor da interseção da reta com o eixo das ordenadas. - Em substituir corretamente o valor de a e de b na equação da reta. - Ao relacionar a equação da reta com a expressão algébrica da função.	**Apoio a prestar 2:** - O que é pedido? - O que precisamos de saber para escrever a expressão algébrica? - O que é o a? E o b? - Que informações conseguimos tirar a partir da observação do gráfico? Esta será a representação gráfica de que tipo de função?

4.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro das questões 1 e 2 | 5 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Representar algebricamente e graficamente uma função afim
- Representar algebricamente uma função afim, dada uma função linear e as respetivas representações gráficas.
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;

- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q1: A professora deverá chamar dois alunos ao quadro para cada um responder a cada uma das expressões algébricas, pedindo que expliquem as suas respostas aos colegas. No final, deverá ficar claro para os alunos que retas paralelas têm o mesmo declive e que o valor da ordenada na origem é o valor da interseção da reta com o eixo das abcissas, isto é, o ponto (0, b). Como a função g é linear e as funções f e h são afins (com os gráficos paralelos ao gráfico de g), a professora deverá enfatizar que ambas as expressões algébricas serão da forma, $0{,}8x + b$.

- **Discussão Q2:** Outro aluno é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, a professora deverá, em interação com os alunos, destacar que, como já foi referido na questão anterior, a reta s passa no ponto (0,1) e portanto sabemos, imediatamente, que o valor da ordenada na origem da expressão algébrica correspondente é 1. Logo, a resposta a esta questão é obtida pela simples substituição dos parâmetros declive e ordenada na origem na equação y=ax+b.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na folha quadriculada, fazendo a correção das questões no caderno diário.

5.º - Trabalho autónomo na resolução da questão 3 do manual escolar, página 169 |8minutos

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
3	**Estratégias 3.a):** -Substituir $f(x)$ por 13, obtendo $2x + 1 = 13$. Ao resolver a respetiva equação de 1º grau, deverão concluir que $x = 6$. - Tentativa e erro. **Dificuldades 3.a):** - Interpretação do enunciado. - Ao confundir as noções de objeto e imagem. - Na resolução da equação de 1º grau. - Utilizar a expressão algébrica da função g ao invés da expressão da função f. **Estratégias 3.b):** -Substituir x por 0 em ambas as funções obtendo, $2 \times 0 + 1 = 1$ e $-2 \times 0 + 3 = 3$, respetivamente. - Substituir x por -1em ambas as funções obtendo, $2 \times (-1) + 1 = -1$ e $-2 \times (-1) + 3 = 5$, respetivamente. **Dificuldades 3.b):** - Interpretação do enunciado. - Ao confundir objeto com imagem. -Resolução incompleta, por exemplo, resolver para apenas para uma das funções. **Estratégias 3.c):**	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 3.a):** - O que é pedido? - Deveremos usar a expressão algébrica de que função? - O que é o objeto de uma função? E a imagem? **Apoio a prestar 3.b):** Análogo à Q3.a)

	- Pela resolução da alínea anterior, o gráfico da função f interseta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1. O gráfico da função g interseta o eixo das abcissas no ponto de ordenada 3. - O gráfico da função f interseta o eixo dos xx quando a ordenada é 0, logo deverão resolver a equação $2x + 1 = 0$, obtendo $x = -\frac{1}{2}$. - O gráfico da função g interseta o eixo dos xx quando a ordenada é 0, logo deverão resolver a equação $-2x + 3 = 0$, obtendo $x = \frac{3}{2}$. **Dificuldades 3.c):** São esperadas bastantes dificuldades na resolução desta alínea, tais como: - Interpretação do enunciado. - Não relacionarem que a interseção do gráfico de uma função com o eixo dos yy é quando o $x = 0$. - Não relacionarem que a interseção do gráfico de uma função com o eixo dos xx é quando o $y = 0$. - Resolução da equação de 1º grau. - Resolução incompleta, por exemplo resolver apenas para uma das funções. **Estratégias 3.d):** - Pelas alíneas anteriores, deverão utilizar dois pares de pontos para traçar cada uma das retas. **Dificuldades 3.d):** - Na escolha dos pares dos pontos. - Na escala do referencial.	**Apoio a prestar 3.c):** - O que é pedido? - O que significa a interseção do gráfico com um dos eixos? - Quando um gráfico interseta o eixo dos xx qual é a sua ordenada? E quando interseta o eixo dos yy qual é a sua abcissa? **Apoio a prestar 3.d):** - Que pontos vais utilizar? - Qual a escala que vais utilizar em cada um dos eixos? - Que tipo de funções são as funções f e g?

6.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 3 | 6 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Representar graficamente uma função afim
- Determinar a interseção do gráfico de uma função afim com os eixos coordenados
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita Matemática, e o espírito crítico dos alunos

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q3.a): A professora deve pedir a um aluno que apresente a sua resolução no quadro mostrando todos os passos que efetuou para chegar ao resultado final, explicando aos colegas a sua resolução. No final deste momento, a professora deve garantir que os alunos sabem indicar objetos e imagens, dada a expressão algébrica de uma função.

- **Discussão Q3.b):** A professora deve pedir a dois alunos que respondam oralmente, cada um para cada um dos objetos. Os alunos além de darem a resposta devem explicar que processo utilizaram para a obter. A professora deve questionar se algum dos colegas obteve outra resposta ou utilizou outro método para a obtenção da mesma. A professora deve, também, se necessário, clarificar eventuais dúvidas.
- **Discussão Q3.c):** Por ser um dos primeiros momentos onde será resolvida uma questão desta natureza, são esperadas bastantes dificuldades, principalmente na interpretação do enunciado. Como tal a professora deve projetar um referencial e conduzir esta discussão pedindo a colaboração de alguns alunos. Questionando: *O que significa um gráfico intersetar um dos eixos coordenados? Que características particulares têm estes pontos?* Aqui, a professora deverá

enfatizar que um par ordenado é do tipo (x, y), questionando os alunos, a título de exemplo: *O ponto ($\frac{1}{5}$,0) marca-se sobre algum dos eixos? E o ponto (0, -2)?*.

- **Discussão Q3.d):** A professora projetará um referencial e solicitará a um aluno que vá ao quadro responder a esta questão, explicando aos colegas a escolha e marcação dos pontos. A professora deve certificar-se que os alunos identificam corretamente o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas, mas também que compreendem como se representam graficamente funções, a partir da sua expressão algébrica. Neste momento poderá ser ainda oportuno trabalhar o sentido crítico dos alunos, ao questionar: *Que tipo de função representam as expressões de f e g? As representações gráficas podem ser as que obtivemos?* Isto, com o intuito de envolver a turma e relacionar a representação gráfica de uma função afim como uma reta que não passa na origem do referencial, dando bastante enfase ao facto de o termo independente coincidir com a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na folha quadriculada, fazendo a correção das questões no caderno diário.

7.º Encerramento da aula | 2 minutos

A professora deverá recolher as folhas quadriculadas e informar que estas serão entregues na aula seguinte. Caso os alunos não concluam em sala de aula todas as questões do manual escolar propostas, estas serão sugeridas como trabalho de casa para a aula seguinte.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 2.6. Planificação 6.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 6.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 123 e 124 — 14 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa.
Cálculo analítico do declive: resolução de exercícios.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Identificar o coeficiente de uma função linear como o declive de uma reta
- Consolidar a noção de que as retas não verticais que passam na origem representam gráficos de funções lineares
- Reconhecer e calcular o declive de uma reta como $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, para $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos da reta, e $x_B \neq x_A$
- Reconhecer retas paralelas como retas que têm o mesmo declive
- Resolver problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto, declive e ordenada na origem
- As funções: constante, linear e afim

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folhas quadriculadas ▪ Guião do GeoGebra ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução ao cálculo analítico do declive, introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa e das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos a pares, na sala de informática da escola.

Momentos da aula:

Momentos da aula	**Tempo previsto** (em 90 minutos)

1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	10 min
3.º	Introdução ao cálculo analítico do declive	15 min
4.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar	15 min
5.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados	10 min
6.º	Apresentação da Tarefa "Um passeio de bicicletas" e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma	23 min
7.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa	10 min
8.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Como o funcionamento dos computadores e do *software* GeoGebra será crucial para o desenvolvimento da aula, antes do início da mesma, a professora deverá acautelar o funcionamento destes dispositivos e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos, ditará o sumário.

2.º - Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa | 10 minutos

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação dos conteúdos trabalhados.

Nesta discussão os alunos podem revelar dificuldades em determinar os pontos do gráfico que intersetam os eixos uma vez que ainda não foi muito explorado em sala de aula. Caso se verifique, a professora deverá fazer uma explicação alargada, enfatizando que qualquer ponto do gráfico de uma função que esteja sobre o eixo das abcissas tem ordenada nula e, do mesmo modo, qualquer ponto do gráfico de uma função que esteja sobre o eixo das ordenadas tem abcissa nula – isto, recorrendo a exemplos concretos.

A professora terá também em atenção a análise que realizou das tarefas de consolidação que os alunos resolveram, podendo ser necessário alguma explicação mais alargada por parte da professora.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

3.º - Introdução ao cálculo analítico do declive | 15 minutos

A professora deve ter em atenção os principais objetivos que pretende alcançar com este segmento inicial:

- Observar que, pelo Teorema de Tales, a razão entre a ordenada e abcissa dos pontos de uma reta que passa pela origem é sempre igual, pelo que se trata do gráfico de uma função linear
- Calcular analiticamente o declive de uma reta, dados dois pontos da mesma

Ao recorrer ao *software* GeoGebra, a professora deve projetar um referencial, com uma função linear ($y = 2x$) sem apresentar a sua expressão algébrica, com os pontos (0,0), (1,2) e (3,6) marcados, questionando a turma: *"Esta é uma representação gráfica de uma função de que tipo?"*, com o objetivo de envolver os alunos nesta discussão, evidenciando que como a reta passa na origem do referencial, é o gráfico de uma função linear.

Neste momento é importante que as perguntas sejam mais diretas para que a professora consiga dirigir a discussão, tendo em vista o objetivo que pretende alcançar. De seguida deve questionar: *"Qual é o coeficiente de x?", "Qual a expressão algébrica desta função?"*. A professora deve, novamente, reforçar que o coeficiente de x é o valor de f(1) e escrever no quadro a expressão $y = 2x$, garantindo que todos os alunos percebem como se obteve a respetiva expressão algébrica, ao evidenciar que f(1)=2, e reforçar que, como foi falado nas aulas anteriores, o valor de a designa—se por **declive**, enfatizando também o uso da terminologia **equação reduzida da reta.**

Após a obtenção da equação reduzida da reta, a professora deve questionar: *"E se não utilizarmos o ponto (1,2)? Se, por exemplo, utilizarmos o ponto (3,6), como obtemos o valor do declive para escrevermos a respetiva equação da reta?".*

Com este questionamento, o objetivo é levar a que os alunos se apercebam que na equação reduzida de uma reta que passe na origem, podem utilizar qualquer ponto para a obter do valor do declive, uma vez que o quociente entre a ordenada e a abcissa de qualquer ponto da reta é o mesmo (neste caso, 2).

A professora deve traçar os dois segmentos de reta paralelos ao eixo dos yy, obtidos a partir da união do ponto (1,0) ao ponto (1,2), e do ponto (3,0) ao ponto (3,6), salientando que formam dois triângulos que são semelhantes, pelo Critério AA. Deste modo, poderemos afirmar, pelo Teorema de Tales, que **a razão entre a ordenada e abcissa dos pontos de uma reta que passa pela origem é sempre igual, pelo que se trata do gráfico de uma função linear, acrescentando ainda que a esta razão se designa por declive da reta**.

A professora deve agora projetar no mesmo referencial uma reta paralela à inicial que passe no ponto (0, 3) e questionar os alunos: *E se for uma reta desta forma, como calculamos o declive? Podemos fazer a razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto?".* A professora deve escolher o ponto (1, 5) mostrando que o declive daria 5 ao invés de 2 e, portanto, como as retas são paralelas teriam o mesmo declive, o que não sucede. Isto, com o objetivo de alcançar que para uma reta que não passe na origem não se consegue calcular o declive da mesma forma, e portanto, a professora deverá dizer aos alunos que irão ver como calcular o declive de uma reta.

De seguida a professora deve explicar que para retas que não passam na origem do referencial o seu declive é calculado a partir de uma expressão e que apenas será necessário conhecermos dois pontos da reta, escrevendo no quadro:

Dados dois pontos, $\boldsymbol{A(x_A, y_A)}$ e $\boldsymbol{B(x_B, y_B)}$ distintos pertencentes a uma reta r, o declive da reta é obtido através do cálculo de $\boldsymbol{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$, com e $x_B \neq x_A$

Retomando o exemplo, a professora exemplifica então como determinar o declive da reta que passa pelos pontos (0,3) e (1,5) e calcula $a = \frac{5-3}{1-0} = 2$, mostrando que desta forma o declive é 2, tal como tinha sido obtido na equação linear paralela a esta, dada inicialmente.

Em interação com a turma a professora deve pedir aos alunos para escolherem dois pontos da reta com o objetivo de mostrar aos alunos que podem sempre escolher dois pontos quaisquer e que a expressão para o cálculo do declive é sempre válida.

Por fim, a professora deve pedir aos alunos que registem estes exemplos no caderno diário, questionando se existem dúvidas. Caso os alunos revelem muitas dúvidas a professora deverá dar outro exemplo, como: *"Se quiséssemos calcular o declive de uma reta que passe nos pontos de coordenadas (6,7) e (-1,13), como faríamos?"*. Em interação com os alunos, a professora deve fazer o cálculo analítico do declive desta reta no quadro, obtendo-se que o declive é $-\frac{6}{7}$.

4.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar| 15 minutos

Ao iniciar este segmento, os alunos serão informados do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho, a pares. A professora deve informar os alunos que irão resolver questões do manual para trabalharem o cálculo analítico do declive, e dará a indicação que devem realizar essas questões nas folhas quadriculadas, distribuídas no início da aula. A professora deverá referir aos alunos que dispõem de 15 minutos para resolver as questões 6.b), 6.d) e 3 da página 174 do manual escolar, informando que após este segmento se iniciará um momento de discussão, e irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos das fichas de trabalho e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
6	**Estratégias 6.b):** - Identificar que uma reta é determinada por dois pontos e reconhecer que para calcular o declive de uma reta precisam conhecer dois pontos da mesma reta. Como se pretende o declive da reta EF, identificar que a reta passa nos pontos E e F. Observar que 2 e -3 são abcissas dos pontos E e F, respetivamente, e que 5 e 3 são as ordenadas dos mesmos pontos. Então, calcular o declive, a, da reta ao recorrer à expressão $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$, obtendo que $a = \frac{3-5}{-3-2}$, resultando $a = \frac{2}{5}$, ou seja, que o declive da reta EF é $\frac{2}{5}$. - Seguindo uma estratégia semelhante à anterior, alguns alunos poderão calcular separadamente $y_F - y_E = -2$ e $x_F - x_E = -5$, obtendo por fim $a = \frac{2}{5}$. - Alguns alunos podem calcular o declive, procedendo de modo análogo às estratégias anteriores, recorrendo à expressão $\frac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$, resultando do mesmo modo $a = \frac{2}{5}$. **Dificuldades 6.b):** Por ser a primeira questão de trabalho autónomo com o cálculo analítico do declive os alunos poderão revelar algumas dificuldades: -Em identificar a expressão do cálculo analítico do declive. -No cálculo de expressões algébricas - Ao identificar as abcissas e ordenadas dos pontos. **Estratégias 6.d):**	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 6.b):** -Como é que estás a pensar? -Se quisermos calcular analiticamente o declive de uma reta, precisamos de conhecer as coordenadas de quantos pontos? - Quais são as coordenadas dos pontos F e E? Quais as abcissas? E as ordenadas? -Que expressão nos permite calcular o declive de uma reta se conhecermos as coordenadas de dois dos seus pontos? -Apoiar os alunos no cálculo de expressões algébricas. **Apoio a prestar 6.d):**

	Análogas à questão 6.b), obtendo-se, neste caso, que $a = 1$. **Dificuldades 6.d):** Análogas a 6.b).	Análogo a 6.b).
3	**Estratégias 3.a):** - Reconhecer que para calcular o declive de uma reta precisam conhecer dois pontos da mesma reta e observar na representação gráfica da reta r os pontos da reta de coordenadas $(0;\ -1)$ e $(1; 3)$.Observar que 0 e 1 são abcissas dos pontos, respetivamente, e que -1 e 3 são as ordenadas dos mesmos pontos. Então, calcular o declive, a, da reta r ao determinar o declive, pela sua expressão analítica, como $a = \frac{3-(-1)}{1-0}$, resultando que o declive da reta r é 4. - Podem seguir também estratégias análogas às identificadas em 6.b). **Dificuldades 3.a):** - Análogas a 6.b). - Em reconhecer que precisam conhecer dois pontos da reta. -Em identificar as coordenadas de dois pontos da reta r, dada a sua representação gráfica. **Estratégias 3.b):** Identificar que o valor da ordenada na origem é a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy, ou seja, reconhecer -1 como ordenada na origem. **Dificuldades 3.b):** - Reconhecer o que é a ordenada na origem. **Estratégias 3.c):** - Indicar $y = ax + b$ como a equação reduzida de uma reta. Ao identificar a como o declive, $a = 4$, e b como a ordenada na origem, $b = -1$, escrever como equação da reta $y = 4x - 1$. **Dificuldades 3.c):** - Em recordar a expressão da equação reduzida de uma reta. - Ao identificar a como o declive da reta e/ou b como a ordenada na origem. - Ao trocar o declive com a ordenada na origem. -Caso tenha respondido de forma incorreta às alíneas anteriores.	**Apoio a prestar 3.a):** - Como estás a pensar? -Para calcularmos o declive de uma reta o que precisamos conhecer? - Conseguimos observar dois pontos que estejam na reta r? Quais as suas coordenadas? - Análogo a 6.b). **Apoio a prestar 3.b):** -Como estás a pensar? - A reta r é a representação gráfica de uma função de que tipo? O que representará o b? -O que achas que é a ordenada na origem? - A reta r interseta o eixo dos yy em algum ponto? **Apoio a prestar 3.c):** - Como estás a pensar? - A reta r é a representação gráfica de uma função de que tipo? - Como é a equação reduzida de uma reta? O que representa o a? E o b? - Que dados já conhecemos da reta r? Existe alguma expressão que relacione/inclua o declive e a ordenada na origem?

5.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados | 10 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Trabalhar o cálculo analítico do declive
- Escrever a equação de uma reta, dada a sua representação gráfica
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, consolidando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário e deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q.6.b):** Esta questão pode originar diversos comentários por parte dos alunos já que é a primeira questão de aplicação que os alunos resolvem de cálculo analítico do declive. A professora deve pedir a um aluno que vá ao quadro explicar a sua resposta, garantindo que está correta para não gerar confusão nos alunos nesta fase inicial. A professora deve questionar se alguém resolveu de outro modo e, caso algum par de alunos tenha optado por calcular $\frac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$, deve, no quadro, resolver em interação com os alunos, frisando que em ambos os casos obteríamos o mesmo valor para o declive.
- **Discussão Q6.d):** Outro aluno (em representação do par) é chamado pela professora a participar oralmente, que depois questionará se existem outras justificações. Aqui, se muitos alunos revelarem dificuldades, a professora deverá fazer uma explicação alargada à turma, quer para enfatizar o cálculo analítico do declive, quer para clarificar o cálculo de expressões numéricas com números racionais.
- **Discussão Q3.a):** Na discussão desta questão a figura com o referencial deve ser projetado no quadro e a professora deve pedir a um aluno que vá ao quadro explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar que, se tivermos a representação gráfica de uma reta e quisermos calcular analiticamente o seu declive é necessário identificarmos as coordenadas de dois pontos da reta. Neste caso a professora deve destacar que apenas conseguíamos reconhecer as coordenadas dos pontos $(0;\,-1)$ e $(1;3)$ mas que poderíamos recorrer a quaisquer outros dois pontos desta reta, desde que conseguíssemos identificar as suas coordenadas.
- **Discussão Q3.b):** A resposta a estas alíneas deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar, com recurso à figura que está projetada as coordenadas do ponto onde a reta interseta os eixos dos yy, (0; -1).
- **Discussão Q3.c):** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para a equação de uma reta, em particular, deve questionar os alunos *Conhecem uma equação de uma reta que em que consigamos identificar o declive e a ordenada na origem?,* com o objetivo de fazer referência à equação reduzida de uma reta e de destacar o a como o declive e o b como a ordenada na origem, ou seja, a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy. Aqui, a professora deverá fazer articulação com o que os alunos têm trabalhado nas aulas anteriores, nomeadamente, recordando, em interação com os alunos que uma reta daquele tipo é a representação gráfica de uma função afim.

Ao articular este segmento com o momento inicial da aula e o cálculo analítico do declive, a professora deverá questionar: *Quantos pontos de uma reta precisamos conhecer para calcular analiticamente o declive? Se tiver uma reta em que estão assinalados 4 pontos, que pontos devo escolher para calcular o declive?* Face às interações dos alunos, a professora deverá recordar quaisquer dois pontos de uma reta me permitem calcular o seu declive, frisando que este cálculo tem por base a diferença das ordenadas sobre a diferença das abcissas.

6.º - Apresentação da Tarefa e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma|23 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora que irão trabalhar a pares na resolução da tarefa e que cada par terá disponível um computador caso considere ser necessário para a resolução da mesma. Nesta ocasião, a professora irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos da folha de respostas e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da tarefa, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 20 para trabalhar autonomamente, lembrando que ficará a seu critério recorrer ao *software* GeoGebra e ao Guião distribuído nas aulas anteriores, fazendo referência que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Durante a resolução autónoma dos alunos e no momento de discussão a tarefa será projetada no quadro branco, sendo um auxílio, sobretudo, aquando a apresentação dos resultados.

A professora deve monitorizar este trabalho autónomo nos mesmos moldes do segmento de trabalho autónomo anterior.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	Tendo em conta o caráter destas questões as estratégias dos alunos poderão ser mais diversificadas do que as aqui apresentadas. **Estratégias 1.1:** - Recorrer ao GeoGebra, identificar o eixo das abcissas como o tempo (em horas) e o eixo das ordenadas como o custo (em euros), traçar o gráfico da função m e, por observação da tabela, marcar dois pontos e traçar a semirreta correspondente ao gráfico da função p. Por observação das representações gráficas indicar que, para uma hora, será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa M. - Recorrer à expressão algébrica da função M e calcular a imagem de 1, obtendo 7. Através dos dados indicados na tabela, calcular analiticamente o declive da semirreta que representa graficamente a situação da empresa P, obtendo que o declive é 4. Ao reconhecer que 4 é o custo fixo do capacete, escrever a equação reduzida da reta $y = 4x + 4$, e indicar que $4 \times 1 + 4 = 8$, será o custo do aluguer de uma bicicleta por uma hora, na empresa P. Finalmente, indicar que a opção mais vantajosa é alugar a bicicleta na empresa M. **Dificuldades 1.1:** - Ao recorrer à expressão algébrica de m e indicar que três horas de aluguer custam 19 euros e, por comparação com a tabela da empresa P, indicar que será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa P. - Calcular, por exemplo, a razão $\frac{16}{3}$ e indicar que o custo do aluguer durante uma hora, na empresa P, é de aproximadamente, 5,33 euros e que esse valor será inferior ao cobrado pela empresa M. -Indicar que será mais vantajoso alugar a bicicleta na empresa P. -Não responder à questão. **Estratégias 1.2:** Mais geralmente, os alunos que não tentaram na alínea anterior escrever uma expressão algébrica para a função que representa a situação da empresa P, poderão agora fazê-lo. Ou ainda, ao recorrer ao GeoGebra, e após a marcação de dois pontos, traçar a semirreta que representa a situação da empresa P, observando a sua equação na *FolhaAlgébrica* do GeoGebra. Poderão ainda surgir as estratégias: - Ao traduzir a situação da empresa P por uma função p, observar que a representação gráfica de m tem maior inclinação em relação ao eixo do xx que p e que, portanto, o custo do aluguer por hora será maior que na empresa P. Por fim, indicar que não será sempre	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* Sempre que se justifique, a professora deve remeter para o guião do GeoGebra ou dar sugestões de utilização do recurso. **Apoio a prestar 1.1:** - Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? -O que representa a função m? -Que informação conheces da empresa M? E da empresa P? - Como varia o custo do aluguer? Depende só do tempo do aluguer? - A situação da empresa P poderá ser traduzida por uma função? Como? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão? **Apoio a prestar 1.2:** -Como é que estás a pensar?

	mais vantajoso alugar na empresa M, apesar de o valor adicional pago pelo capacete ser mais baixo nesta empresa. - Recorrer às representações gráficas que traduzem estas situações, tal como a estratégia mencionada para a alínea 1.1, e indicar que, num dado momento, passa a ser mais vantajoso efetuar o aluguer na empresa P, apesar do aluguer obrigatório do capacete ter um maior custo. Alguns pares de alunos poderão recorrer também ao GeoGebra e, determinar o ponto onde as duas semirretas se intersetam, (1,5;10). **Dificuldades 1.2:** - Ao recorrer ao argumento do valor fixo pago pelo aluguer do capacete. -Ao responder afirmativamente ou caso não justifique a resposta. -Não responder à questão.	-Quanto pagaria um cliente se alugasse a bicicleta 1 hora, em cada uma das empresas? E se quisesse alugar 3 horas? - Estás a incluir nesse custo o valor pago pelo aluguer do capacete? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão? -Conseguiremos com recurso ao GeoGebra conhecer as coordenadas desse ponto? Tenta consultar a página 6 do Guião. - O que significam as coordenadas desse ponto?
	Estratégias 1.3: Pelo caráter aberto desta questão, poderá suscitar diversas argumentações, mais geralmente: -Ao observar a representação gráfica das suas situações os alunos poderão responder que se pretendermos alugar a bicicleta até uma hora e meia pagarão menos se alugarem na empresa M, se quiserem alugar uma hora e meia é indiferente a escolha da empresa pois pagarão o mesmo, e que, será mais vantajoso optar pela empresa P se o passeio durar mais que uma hora e trinta minutos. - Recorrer aos valores da tabela e indicar que para 7 horas de aluguer pagariam 32 euros na empresa P e 43 euros na empresa M, portanto será mais vantajoso optar pela empresa P. -Justificar que os amigos não irão alugar a bicicleta por mais de uma hora e portanto devem optar pelo aluguer na empresa M. **Dificuldades 1.3:** -É sempre mais vantajoso alugar na empresa M porque o custo do aluguer obrigatório do capacete é inferior ao pago na outra empresa. -Não responder.	**Apoio a prestar 1.3:** - Se quisesse alugar a bicicleta 5horas em que empresa seria mais vantajoso fazer o aluguer? E se quisesse alugar apenas uma hora? - Que características distintas apresentam as representações? Têm alguma característica comum? - O que significa neste contexto ponto de coordenadas (1,5;10) - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão?

7.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Reconhecer uma função afim em diferentes representações;
- Resolver problemas com a função afim;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Quem recorreu ao GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

A professora deve também cuidar que as estratégias dos alunos não são exploradas de forma pormenorizada para não influenciar as estratégias na futura resolução de problemas.

- **Discussão Q1.1:** A professora deve solicitar a dois alunos (representativos de dois pares), um que tenha utilizado o recurso GeoGebra e outro que tenha resolvido analiticamente, que respondam oralmente. Ambos terão de justificar oralmente qual será o tarifário mais vantajoso, e quais em que dados basearam a sua resposta. A professora, com recurso ao GeoGebra, pode colocar uma grelha e mostrar a ordenada da abcissa 1 nas duas funções, com o intuito de esclarecer eventuais dúvidas que ainda persistam. Caso muitos alunos tenham interpretado os dados da empresa P como uma situação de proporcionalidade direta, a professora deve fazer uma explicação mais alargada para a turma, sublinhando o custo fixo do aluguer obrigatório do capacete.

- **Discussão Q1.2:** A professora deve, novamente, solicitar a dois alunos (representativos de dois pares) que respondam oralmente. Se possível, um dos alunos deve ter respondido afirmativamente e o outro discordado da afirmação. A professora deve envolver toda a turma nesta discussão, questionando: *"Concordas com qual dos teus colegas? E Porquê? Qual a vossa opinião?"*. Neste momento a professora deve ter a representação gráfica das duas funções, mas não deve dar grande enfase ao ponto de interseção de ambas, para não se diminuir o interesse na discussão da questão seguinte.
- **Discussão Q1.3**: Devido ao carácter mais aberto desta questão, a professora deverá pedir a dois ou três alunos que deem a sua opinião, mas que a justifiquem. A professora não deve induzir nenhuma das respostas e apenas monitorizar toda a discussão, devendo apenas alertar quando algum dos alunos apresentar uma justificação incorreta. A professora deverá projetar no GeoGebra a representação gráfica das duas funções, mostrando o ponto de interseção, com o objetivo de clarificar os alunos que só é vantajoso a partir do ponto (1.5;10), isto é, alugar a bicicleta na empresa M só será mais vantajoso até uma hora e meia de utilização e, portanto, a escolha da empresa deve ser feita dependendo do tempo que os amigos pretendem utilizar as bicicletas. A professora poderá recorrer à discussão desta alínea para clarificar a resposta às alíneas anteriores, se sentir que ainda existem dúvidas.

8.º Encerramento da aula	|2 minutos

A professora deverá recolher o enunciado da Tarefa dos alunos bem como as folhas onde os alunos resolveram as questões do manual escolar e informar que estas serão entregues na aula seguinte.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: questões 1 e 4 da página 171 e a questão 8 da página 174, do manual escolar.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 2.7. Planificação 7.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 7.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 125 e 126 | 18 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa.
Realização de uma tarefa utilizando o software GeoGebra.
Exercícios do manual escolar: o declive de uma reta.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:
- Consolidar o cálculo do declive de uma reta como $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, para $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos da reta, e $x_B \neq x_A$
- Resolver problemas com a função afim, com recurso ao *software* GeoGebra
- Reconhecer, a representação gráfica de uma reta com declive negativo
- Reconhecer que o declive da reta horizontal é nulo

Conhecimentos prévios dos alunos:
- A noção de função e conceitos como: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto, declive e ordenada na origem
- As funções: constante, linear e afim
- Cálculo analítico do declive
- Reconhecer retas paralelas como retas que têm o mesmo declive

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Tarefa "Um passeio de bicicletas" ▪ Computador com o *software* GeoGebra ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folhas quadriculadas ▪ Guião do GeoGebra ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:
- Introdução da tarefa, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da tarefa e das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos a pares, na sala de informática da escola.

Momentos da aula:

Momentos da aula		**Tempo previsto** (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min

2.º	Apresentação da Tarefa "Um passeio de bicicletas" e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma	23 min
3.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa	10 min
4.º	Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	15 min
5.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar	23 min
6.º	Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados	12 min
7.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 5 minutos

Como o funcionamento dos computadores e do *software* GeoGebra será crucial para o desenvolvimento da aula, antes do início da mesma, a professora deverá acautelar o funcionamento destes dispositivos e do projetor.

Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos, ditará o sumário.

2.º - Apresentação da Tarefa e trabalho autónomo dos alunos na resolução da mesma|23 minutos

Ao distribuir a Ficha de Trabalho por todos os alunos, estes serão informados pela professora que irão trabalhar a pares na resolução da tarefa e que cada par terá disponível um computador caso considere ser necessário para a resolução da mesma. Nesta ocasião, a professora irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos da folha de respostas e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da tarefa, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega. Após este segmento, a professora indicará que os alunos dispõem de 20 para trabalhar autonomamente, lembrando que ficará a seu critério recorrer ao *software* GeoGebra e ao Guião distribuído nas aulas anteriores, fazendo referência que a esse momento se seguirá uma discussão em grande grupo.

Durante a resolução autónoma dos alunos e no momento de discussão a tarefa será projetada no quadro branco, sendo um auxílio, sobretudo, aquando a apresentação dos resultados.

A professora deve monitorizar este trabalho autónomo nos mesmos moldes do segmento de trabalho autónomo anterior.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	Tendo em conta o caráter destas questões as estratégias dos alunos poderão ser mais diversificadas do que as aqui apresentadas. **Estratégias 1.1:** - Recorrer ao GeoGebra, identificar o eixo das abcissas como o tempo (em horas) e o eixo das ordenadas como o custo (em euros), traçar o gráfico da função m e, por observação da tabela, marcar dois pontos e traçar a semirreta correspondente ao gráfico da função p. Por observação das representações gráficas indicar que, para uma hora, será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa M.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* Sempre que se justifique, a professora deve remeter para o guião do GeoGebra ou dar sugestões de utilização do recurso.

	- Recorrer à expressão algébrica da função M e calcular a imagem de 1, obtendo 7. Através dos dados indicados na tabela, calcular analiticamente o declive da semirreta que representa graficamente a situação da empresa P, obtendo que o declive é 4. Ao reconhecer que 4 é o custo fixo do capacete, escrever a equação reduzida da reta $y = 4x + 4$, e indicar que $4 \times 1 + 4 = 8$, será o custo do aluguer de uma bicicleta por uma hora, na empresa P. Finalmente, indicar que a opção mais vantajosa é alugar a bicicleta na empresa M. **Dificuldades 1.1:** - Ao recorrer à expressão algébrica de m e indicar que três horas de aluguer custam 19 euros e, por comparação com a tabela da empresa P, indicar que será mais vantajoso fazer o aluguer na empresa P. - Calcular, por exemplo, a razão $\frac{16}{3}$ e indicar que o custo do aluguer durante uma hora, na empresa P, é de aproximadamente, 5,33 euros e que esse valor será inferior ao cobrado pela empresa M. -Indicar que será mais vantajoso alugar a bicicleta na empresa P. -Não responder à questão. **Estratégias 1.2:** Mais geralmente, os alunos que não tentaram na alínea anterior escrever uma expressão algébrica para a função que representa a situação da empresa P, poderão agora fazê-lo. Ou ainda, ao recorrer ao GeoGebra, e após a marcação de dois pontos, traçar a semirreta que representa a situação da empresa P, observando a sua equação na *FolhaAlgébrica* do GeoGebra. Poderão ainda surgir as estratégias: - Ao traduzir a situação da empresa P por uma função p, observar que a representação gráfica de m tem maior inclinação em relação ao eixo do xx que p e que, portanto, o custo do aluguer por hora será maior que na empresa P. Por fim, indicar que não será sempre mais vantajoso alugar na empresa M, apesar de o valor adicional pago pelo capacete ser mais baixo nesta empresa. - Recorrer às representações gráficas que traduzem estas situações, tal como a estratégia mencionada para a alínea 1.1, e indicar que, num dado momento, passa a ser mais vantajoso efetuar o aluguer na empresa P, apesar do aluguer obrigatório do capacete ter um maior custo. Alguns pares de alunos poderão recorrer também ao GeoGebra e, determinar o ponto onde as duas semirretas se intersetam, (1,5;10). **Dificuldades 1.2:** - Ao recorrer ao argumento do valor fixo pago pelo aluguer do capacete. -Ao responder afirmativamente ou caso não justifique a resposta. -Não responder à questão. **Estratégias 1.3:** Pelo caráter aberto desta questão, poderá suscitar diversas argumentações, mais geralmente: -Ao observar a representação gráfica das suas situações os alunos poderão responder que se pretendermos alugar a bicicleta até uma hora e meia pagarão menos se alugarem na empresa M, se quiserem alugar uma hora e meia é indiferente a escolha da empresa pois pagarão o mesmo, e que, será mais vantajoso optar	**Apoio a prestar 1.1:** - Qual o teu raciocínio, explica-me como pensaste? -O que representa a função m? -Que informação conheces da empresa M? E da empresa P? - Como varia o custo do aluguer? Depende só do tempo do aluguer? - A situação da empresa P poderá ser traduzida por uma função? Como? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão? **Apoio a prestar 1.2:** -Como é que estás a pensar? -Quanto pagaria um cliente se alugasse a bicicleta 1 hora, em cada uma das empresas? E se quisesse alugar 3 horas? - Estás a incluir nesse custo o valor pago pelo aluguer do capacete? - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão? -Conseguiremos com recurso ao GeoGebra conhecer as coordenadas desse ponto? Tenta consultar a página 6 do Guião. - O que significam as coordenadas desse ponto? **Apoio a prestar 1.3:** - Se quisesse alugar a bicicleta 5horas em que empresa seria mais vantajoso fazer o aluguer? E se quisesse alugar apenas uma hora?

	pela empresa P se o passeio durar mais que uma hora e trinta minutos. - Recorrer aos valores da tabela e indicar que para 7 horas de aluguer pagariam 32 euros na empresa P e 43 euros na empresa M, portanto será mais vantajoso optar pela empresa P. -Justificar que os amigos não irão alugar a bicicleta por mais de uma hora e portanto devem optar pelo aluguer na empresa M. **Dificuldades 1.3:** -É sempre mais vantajoso alugar na empresa M porque o custo do aluguer obrigatório do capacete é inferior ao pago na outra empresa. -Não responder.	- Que características distintas apresentam as representações? Têm alguma característica comum? - O que significa neste contexto ponto de coordenadas (1,5;10) - Se esse referencial estivesse sobre um quadriculado seria mais simples responder à questão?

3.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados da Tarefa | 10 minutos

A professora, após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Reconhecer uma função afim em diferentes representações;
- Resolver problemas com a função afim;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio, a escrita e o gosto pela Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Quem recorreu ao GeoGebra? Todos conseguiram resolver esta questão? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

A professora deve também cuidar que as estratégias dos alunos não são exploradas de forma pormenorizada para não influenciar as estratégias na futura resolução de problemas.

- **Discussão Q1.1:** A professora deve solicitar a dois alunos (representativos de dois pares), um que tenha utilizado o recurso GeoGebra e outro que tenha resolvido analiticamente, que respondam oralmente. Ambos terão de justificar oralmente qual será o tarifário mais vantajoso, e quais em que dados basearam a sua resposta. A professora, com recurso ao GeoGebra, pode colocar uma grelha e mostrar a ordenada da abcissa 1 nas duas funções, com o intuito de esclarecer eventuais dúvidas que ainda persistam. Caso muitos alunos tenham interpretado os dados da empresa P como uma situação de proporcionalidade direta, a professora deve fazer uma explicação mais alargada para a turma, sublinhando o custo fixo do aluguer obrigatório do capacete.
- **Discussão Q1.2:** A professora deve, novamente, solicitar a dois alunos (representativos de dois pares) que respondam oralmente. Se possível, um dos alunos deve ter respondido afirmativamente e o outro discordado da afirmação. A professora deve envolver toda a turma nesta discussão, questionando: *"Concordas com qual dos teus colegas? E Porquê? Qual a vossa opinião?"*. Neste momento a professora deve ter a representação gráfica das duas funções, mas não deve dar grande enfase ao ponto de interseção de ambas, para não se diminuir o interesse na discussão da questão seguinte.
- **Discussão Q1.3**: Devido ao carácter mais aberto desta questão, a professora deverá pedir a dois ou três alunos que deem a sua opinião, mas que a justifiquem. A professora não deve induzir nenhuma das respostas e apenas monitorizar toda a discussão, devendo apenas alertar quando algum dos alunos apresentar uma justificação incorreta. A professora deverá projetar no GeoGebra a representação gráfica das duas funções, mostrando o ponto de interseção, com o objetivo de clarificar os alunos que só é vantajoso a partir do ponto (1,5;10), isto é, alugar a bicicleta na empresa M só será mais vantajoso até uma hora e meia de utilização e, portanto, a escolha da empresa deve ser feita dependendo do tempo que os amigos pretendem utilizar as

bicicletas. A professora poderá recorrer à discussão desta alínea para clarificar a resposta às alíneas anteriores, se sentir que ainda existem dúvidas.

4.º - Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa | 15 minutos

A professora deverá perguntar aos alunos se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa, e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação dos conteúdos trabalhados.

Nesta discussão a professora deve tentar assegurar-se que os alunos não têm dúvidas no cálculo analítico do declive. Em particular, deve dar especial enfoque à questão 8 da página 174 do manual escolar, devendo clarificar todas as dúvidas que tenham surgido na realização desta questão. A professora deve projetar os quatro referenciais no quadro identificando cada uma das retas com a sua equação reduzida, em interação com os alunos. A professora deverá questionar os alunos: "*Que semelhanças identificam nas retas r e s? E nas retas t e u?",* este questionamento com o objetivo de que os alunos se centrem no declive das retas. Nesta interação, a professora deve enfatizar as diferentes posições das retas quando o declive é negativo ou positivo. De modo a complementar esta discussão, a professora poderá traçar outras retas num referencial questionando os alunos se terão declive positivo ou negativo.

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

5.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução de questões do manual escolar| 23 minutos

Ao iniciar este segmento, os alunos serão informados do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho, a pares. A professora deve informar os alunos que irão resolver questões do manual para trabalharem o cálculo analítico do declive, e dará a indicação que devem realizar essas questões nas folhas quadriculadas, distribuídas no início da aula. A professora deverá referir aos alunos que dispõem de 23 minutos para resolver a questão 12 da página 177, as questões 6.a), 6.d), 6.e) da página 176, a questão 4 da página 178 e a questão 8 da página 179 do manual escolar, informando que após este segmento se iniciará um momento de discussão, e irá reforçar que os alunos não devem apagar os seus registos das fichas de trabalho e, caso se enganem, devem fazer um traço por cima.

Os alunos deverão ser informados que na questão 6 devem ainda fazer uma representação gráfica das funções e que nas questões de escola múltipla, 4 e 8, devem justificar o seu raciocínio. Considerando os diferentes ritmos de trabalho de cada aluno serão adicionalmente propostas as questões: 17 da página 177 e 7 da página 179 do manual escolar.

A professora, à semelhança do segmento de trabalho autónomo anterior, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
12	**Estratégias 12:** - A reta t é paralela ao eixo das abcissas e passa no ponto (0,4) logo a sua equação é $y = 4$ - A reta r é linear, portanto é da forma $y = ax$. Para calcular o valor do declive os alunos calcularão a razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto que pertença à reta. Por exemplo, utilizando o ponto (6,3) obtendo $a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ logo a sua equação é $y = \frac{1}{2}x$ ou $y = 0{,}5x$. Alguns alunos poderão utilizar dois pontos e calcular o declive utilizando, por exemplo o ponto (4,2) e (6,3) obtendo $a = \frac{3-2}{6-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. - A reta s é paralela à reta r, logo tem declive 0,5 e ordenada na origem -2. A sua equação é $y = 2x - 2$. Os alunos também poderão utilizar dois pontos e calcular o declive utilizando, por exemplo o ponto (0,-2) e (4,0) obtendo $a = \frac{0-(-2)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. - As estratégias para a reta p são análogas à da reta r. Obtendo $y = -2x$. - As estratégias para a reta s são análogas à da reta s. Obtendo $y = -2x - 2$. **Dificuldades 12:** - Não são expetáveis dificuldades na obtenção da equação das retas r, s e t. - Ao obter a equação da reta p, apesar de sere do tipo $y = ax$, como o declive é negativo são esperadas algumas dificuldades. Os alunos poderão pensar que o valor obtido, por ser negativo, poderá estar incorreto. - Na obtenção da equação da reta são esperadas dificuldades análogas às anteriores.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 12:** -Como é que estás a pensar? - Começaste por escrever a equação de que reta? - Qual a relação entre as retas r e s? - Qual a relação entre as retas p e q? - De que tipo é a reta t? - Através da representação gráfica, que informação temos do declive das retas p e q?
6	**Estratégias 6.a):** - Reconhecer a forma canónica de uma função f como $f(x) = ax + b$ e escrever que, $f(x) = -3x + 3$. Identificar f como uma função afim, reconhecer que o seu gráfico é uma reta e que, para traçar uma reta, são necessários dois pontos. Identificar dois pontos pertencentes à reta e calcular, por exemplo, $f(0) = 2$ e $f(1) = -1$, resultando os pontos (0,2) e (1,-1). Marcar os pontos no referencial e traçar a reta. **Dificuldades 6.a):** - Em escrever a forma canónica. - Em reconhecer que precisam conhecer dois pontos para traçar a reta. - Em calcular dois pontos do gráfico de f, dada a sua expressão algébrica. - Caso identifique mal os pontos e trace uma reta que passe na origem do referencial. **Estratégias 6.d):** - Reconhecer a forma canónica de uma função i como i$(x) = ax + b$ e escrever que, $i(x) = -x$. Identificar i como uma função linear, reconhecer que o seu gráfico é uma reta que passa na origem do referencial e que, para traçar uma reta, são necessários dois pontos. Identificar dois pontos pertencentes à reta e calcular, por exemplo, $f(0) = 0$ e $f(1) = -1$, resultando os pontos (0,0) e (1,-1). Marcar os pontos no referencial e traçar a reta.	**Apoio a prestar 6.a):** - Como estás a pensar? -Qual é a forma canónica de uma função? - É uma função de que tipo? Como será o seu gráfico? - Quantos pontos precisamos conhecer para traçar uma reta? - O gráfica desta função passa na origem do referencial? -Como poderemos identificar um ponto da reta? -Qual é a imagem de 0? Qual é a imagem de 2? **Apoio a prestar 6.d):** Análogo a 6.a)

	Dificuldades 6.d): -Análogas a 6.a) - Reconhecer que é uma função linear e que passa na origem do referencial. **Estratégias 6.e):** - Reconhecer a forma canónica de uma função k como k$(x) = ax + b$ e escrever que, $k(x) = -2$. Identificar k como uma função constante, reconhecer que o seu gráfico é uma reta horizontal e que, para marcar o gráfico basta traçar uma reta paralela ao eixo das abcissas que passa no ponto (0,-2). **Dificuldades 6.e):** -Ao escrever a função na forma canónica. - Ao não identificar que é uma função constante e que a sua reta é paralela ao eixo das abcissas.	**Apoio a prestar 6.e):** -Análogo a 6.a) -Apoiar o aluno na escrita da função na forma canónica. -Se o ponto tiver abcissa 1, qual a sua ordenada? E se tiver abcissa 5? E -4?
4	**Estratégias 4:** - Reconhecer que como a reta tem declive negativo as opções (A) e (D) são excluídas, e eliminar a opção (C) por intersetar o eixo dos yy num ponto de ordenada negativa. Finalmente, optar pela hipótese (B) por ser a representação de uma reta com declive negativo e que tem ordenada na origem positiva. -Determinar dois pontos da reta e traça-la, optando pela hipótese (B). **Dificuldades 4:** Ao identificar uma reta com declive negativo: - como uma reta com pontos de coordenadas negativas. -como uma reta que interseta o semieixo negativo dos xx ou dos yy.	**Apoio a prestar 4:** -Qual é o declive desta reta? É positivo ou negativo? -Qual é a ordenada na origem? -Se o declive é negativo a reta será de que tipo?
8	**Estratégias 8.1:** - Reconhecer o gráfico de uma função de proporcionalidade direta como uma reta que passa na origem do referencial, optando pela hipótese (A). **Dificuldades 8.1:** Ao identificar o gráfico de uma função de proporcionalidade direta: - Como uma reta que passa na origem do referencial. - Como uma reta que não pode ter declive negativo. Ao optar por escolher uma hipótese que inclua retas paralelas. **Estratégias 8.2:** -Identificar que o valor da ordenada na origem é zero, ou seja , que é uma reta do tipo y=ax, e reconhecer que o declive pode ser dado pela razão entre a ordenada e abcissa dos seus pontos, calculando, por exemplo, a partir do ponto (1,2) que o declive é $\frac{2}{1} = 2$. Por exclusão de partes, optar pela hipótese (B). - Identificar um ponto da reta através da sua representação gráfica e substituir em cada uma das expressões, selecionando a hipótese (B). - Através das expressões algébricas, determinar um ponto e confirmar, através da representação gráfica se o ponto pertence à reta. Optar pela hipótese (B). **Dificuldades 8.2:** -Ao identificar de forma incorreta o gráfico da função g. -Ao reconhecer que é uma função afim. -Em calcular o declive da reta. **Estratégias 8.3:**	**Apoio a prestar 8.1:** - Como estás a pensar? - Podes dar-me uma exemplo de uma função de proporcionalidade direta? - Uma função de proporcionalidade direta é uma função linear ou afim? - O gráfico de uma função de proporcionalidade direta passa na origem do referencial? **Apoio a prestar 8.2:** -Como estás a pensar? - A função g é uma função de que tipo? -Qual a sua ordenada na origem? -Poderemos calcular o declive da reta? -Consegues identificar algum(ns) ponto(s) da reta? **Apoio a prestar 8.3:**

	- Recorrer ao raciocínio feito na alínea anterior, ou a um raciocínio análogo, e reconhecer que a reta que é o gráfico de h tem o mesmo que a reta que é o gráfico da função g, 2, identificando que a ordenada na origem é 6. Selecionar a hipótese (D). **Dificuldades 8.3:** - Caso responda incorretamente à alínea anterior e, ao reconhecer que os gráficos de g e h são retas paralelas, opte por uma expressão com o mesmo declive. - Ao calcular o declive. -Ao identificar a ordenada na origem. - Caso não identifique que com é uma função afim a ordenada na origem é diferente de zero.	-Como estás a pensar? - A função g é uma função de que tipo? -Qual a sua ordenada na origem? -Poderemos calcular o declive da reta? -Consegues identificar algum(ns) ponto(s) da reta? - Como estão relacionados os gráficos de g e h? Que influencia tem na sua expressão algébrica?
	Estratégias 8.4: - Recorrer ao raciocínio feito na alínea 8.2, ou a um raciocínio análogo, e reconhecer que a reta que é o gráfico de f tem o mesmo declive que o gráfico da função g e de h, 2, identificando que a ordenada na origem é 6 negativa e superior a 7. Selecionar a hipótese (C). **Dificuldades 8.4:** -Análogas a 8.3 -Ao reconhecer que o valor da ordenada na origem é negativo e que o declive é positivo, excluindo-se (D). -Ao identificar a ordenada na origem como a ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos xx.	**Apoio a prestar 8.4:** -Análogo a 8.3 -Em que ponto a reta interseta o eixo xx?

6.º - Discussão em grande grupo e apresentação dos resultados | 12 minutos

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Trabalhar o cálculo analítico do declive e a noção de paralelismo para retas com o mesmo declive.
- Trabalhar a interpretação geométrica de declive positivo, declive negativo e nulo;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, consolidando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário e deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q.12:** Na discussão desta questão a figura será projetada e a professora solicitará a dois ou três alunos que participem oralmente, explicando a sua resposta. A professora deve questionar se emergiram outras estratégias com o objetivo de destacar que *p* e *q* são retas paralelas pelo que têm o mesmo declive - analogamente para as retas *r* e *s*. Assim, a professora deverá frisar que poderiam ter calculado o declive para a reta *p* recorrendo à razão entre a abcissa e a ordenada de um dos seus pontos, e para a reta *q,* utilizando a expressão do cálculo do declive (recorrendo a dois pontos da reta). No entanto, a professora deve enfatizar que, como *p* e *q* são paralelas, bastaria calcular o declive para uma das retas e atender à ordenada na origem de cada uma - analogamente para *s* e *r*. Nesta discussão, a professora deverá também fazer alusão às diferenças na representação entre uma reta com declive positivo ou negativo. No caso da reta *t,* deverá ficar explicito para os alunos que é uma reta horizontal, paralela ao eixo das abcissas e que tem uma equação do tipo $y = b$. Assim, em interação com os alunos, a professora deverá observar que o declive de uma reta deste tipo é zero (podendo exemplificar, considerando dois pontos desta reta).

- **Discussão Q6.a):** A professora solicitará a uma aluno que vá ao quadro explicar a sua resposta. O aluno deverá traçar a reta no referencial, com o auxílio da professora. Aqui, a professora deverá tentar garantir que os alunos ficam esclarecidos quanto à forma canónica da expressão algébrica de uma função. Na discussão desta questão a professora deverá questionar aos alunos de que tipo é aquela função, evidenciando que o seu gráfico é uma reta que não passa na origem do referencial e que, para a traçarmos, será crucial conhecermos dois dos seus pontos e que, para tal, devemos determinar a ordenada de dois pontos com abcissa distintas.
- **Discussão Q6.d) e Q6.e):** Outro aluno (em representação do par) é chamado pela professora a participar oralmente e a expor o seu raciocínio, enquanto a professora regista no quadro. Nesta interação com os alunos, a professora deverá questionar os alunos que tipo de função é a i e a k, frisando que, só conseguimos dar resposta a esta questão depois de escrevermos a função na forma canónica. Em interação com os alunos a professora traçará as retas $y=-x$ e $y=-2$ num referencial, dando destaque a que, no caso da reta horizontal, basta traçar uma reta paralela ao eixo dos xx e que passe no ponto (0,-2). A professora deve ainda questionar a turma: *Qual é o declive da reta do gráfico da função k?*
- **Discussão Q.4:** A resposta a esta questão deverá ser dada oralmente por um aluno, que por sua vez deverá explicar como o par pensou. Nesta discussão a professora deverá enfatizar, os argumentos que excluem as hipóteses (A), (C) e (C), consoante as estratégias a que os alunos recorram. Com os quatro referenciais projetados ao longo da discussão a professora deve frisar que a reta tem declive negativo que a a sua ordenada na origem é positiva.
- **Discussão Q.8.1:** Durante a discussão da questão 8 a figura será projetada. Nesta alínea, um aluno explicará a sua resposta oralmente, ficando a cargo da professora esclarecer dúvidas que possam surgir e enfatizar que as funções de proporcionalidade são funções lineares, pelo que passam na origem do referencial.
- **Discussão Q.8.2:** A professora deve pedir a outro aluno que dê a sua resposta oralmente e que justifique a sua opção. Em interação com a turma, a professora deverá clarificar a exclusão das hipóteses (A), (C) e (D), sublinhando que a função g é linear e portanto passa na origem do referencial, e ainda que é possível calcular o seu declive a partir da razão entre a ordenada e a abcissa de um dos seus pontos.
- **Discussão Q.8.3:** No seguimento da alínea anterior, um outro aluno deve expor a resposta do par oralmente. Neste segmento, a professora deve chamar à atenção para o facto de o gráfico da função h ser paralelo ao gráfico da função g e, portanto, as retas têm o mesmo declive.

- **Discussão Q.8.4**: Outro aluno irá responder oralmente a esta questão e a professora deve reforçar a ideia de paralelismo entre as retas e a relação entre o seu declive, sublinhando o facto de a ordenada na origem da reta do gráfico de f ser negativa - por estar associada ao ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas.

7.º Encerramento da aula |2 minutos

A professora deverá recolher o enunciado da Tarefa dos alunos bem como as folhas onde os alunos resolveram as questões do manual escolar e informar que estas serão entregues na aula seguinte.

Será feita uma proposta de trabalho de casa, que os alunos devem registar no caderno: questões 2 e 4 da página 80 do Caderno de Atividades e a questão 3 da página 171 do manual escolar.

Neste segmento final, com o apoio da colega de estágio a professora entregará aos alunos os documentos recolhidos da aula anterior.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 2.8. Planificação 8.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 8.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 127 — 20 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa.
A reta vertical. Resolução de exercícios do manual escolar.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Consolidar a noção de declive de uma reta.
- Identificar que todos os pontos de uma reta vertical têm a mesma abcissa.
- Reconhecer a equação de uma reta vertical como $x = c$ e que essa reta passa no ponto de coordenadas $(c, 0)$.
- Reconhecer que o declive da reta horizontal é nulo.

Conhecimentos prévios dos alunos:
- Os conceitos de função, ordenada na origem e declive
- Identificar e representar uma função linear, afim ou constante
- Cálculo analítico do declive

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Manual escolar ▪ Computador e projetor ▪ Quadro e marcador	▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar ▪ Folhas quadriculadas

Metodologia de trabalho:
- Introdução do trabalho a realizar, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução das questões do manual escolar, trabalho autónomo dos alunos, individual ou a pares (de acordo com a disposição na sala de aula).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Equação de uma reta vertical	12 min
3.º	Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa	15 min
4.º	Trabalho autónomo na resolução de questões do manual escolar	7 min
5.º	Discussão em grande grupo de questões do manual escolar	5 min
6.º	Encerramento da aula	2 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças | 4 minutos

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário, enquanto contará com a colaboração da colega de estágio para o registo dos alunos que realizaram o trabalho de casa e para a distribuição de folhas quadriculadas (onde os alunos farão os seus registos escritos nesta aula).

2.º - Equação de uma reta vertical | 12 minutos

A professora deve marcar num referencial dois pontos com a mesma abcissa, por exemplo (3,2) e (3,5), questionando os alunos: *"Posso traçar alguma reta que passe por estes pontos? Quantas retas que contenham estes dois pontos consigo traçar?*". Aqui, a professora irá projetar um ficheiro GeoGebra com esta reta, perguntando aos alunos exemplos de outros pontos que estejam nesta reta, questionando: "*Como são as coordenadas de um ponto qualquer que esteja nesta reta?"*, com o objetivo de que os alunos observem que, qualquer ponto daquela reta terá abcissa 3, questionando ainda *"Em que ponto esta reta cruza o eixo das abcissas?".* Assim, em interação com os alunos, a professora deve evidenciar que esta é uma reta vertical que passa pelo ponto de coordenadas (3,0) e que como a abcissa de todos os pontos que estão naquela reta é 3, a equação da reta é $x = 3$, porque não depende do valor de y.

Ainda neste momento, a professora deve frisar que nos pontos que pertencem à reta x=3 apenas varia a sua ordenada. Então, a professora deve fazer referência ao facto de não se considerar declive na reta vertical uma vez que têm a mesma abcissa e, para calcular o declive de uma reta, precisaríamos conhecer dois pontos dessa reta com abcissa distinta.

Ao recorrer ao ficheiro GeoGebra, utilizando o seletor, a professora deve mostrar outros exemplos de retas verticais, nomeadamente, retas verticais que passem por pontos de abcissa negativa, frisando que qualquer dois pontos da reta tem a mesma abcissa. Em particular, a professora deve traçar a reta $x = 0$, pedindo aos alunos que indiquem 3 ou 4 pontos da reta, com o objetivo que observem que têm todos abcissa 0 e, portanto, a reta tem equação $x = 0$, sendo coincidente com o eixo das ordenadas.

Para que fique como registo dos alunos no caderno a professora deve ditar uma breve síntese referente à reta vertical. Assim, a professora deverá referir que uma reta vertical é constituída por pontos com uma mesma abcissa, c, e que passa pelo ponto de coordenadas $(c, 0)$, fazendo referência a que uma equação desta reta é $x = c$.

Em jeito de conclusão, a professora deverá questionar "*Recordam-se o que é uma função?",* para recordar que para cada objeto existe uma única imagem, e neste caso, ao retomar o exemplo da equação $x = 3$, referir que para o objeto 3 existem inúmeras imagens, então, a reta $x = 3$ não representa uma função, tal como qualquer reta vertical.

3.º - Esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho de casa | 15 minutos

A professora deverá questionar se existiram dúvidas na resolução do trabalho de casa [finalizar as questões 12, página 177, questão 4, página 178, e fazer a questão 8 da página 179] e deverá resolver as questões que levantaram dúvidas no quadro, ou oralmente, em grande grupo, com o objetivo de clarificar os alunos. A professora deverá recordar os alunos, que não realizaram o trabalho de casa, que devem fazê-lo porque será um importante elemento de consolidação dos conteúdos trabalhados.

Nesta discussão a professora deve tentar assegurar-se que os alunos não têm dúvidas no cálculo analítico do declive, que identificam retas paralelas como retas que têm o mesmo declive, e que identificam a ordenada da origem de uma reta como o valor da ordenada do ponto em que a reta interseta o eixo dos yy. Neste segmento em grande grupo a professora deve interagir com os alunos com o objetivo que trabalhem a interpretação geométrica de declive positivo, declive negativo e nulo.

Mais especificamente, na discussão da questão 12, no caso da reta *t,* a professora deverá frisar que é uma reta horizontal, paralela ao eixo das abcissas e que tem uma equação do tipo $y = b$. Assim, em interação com os alunos, a professora deverá observar que o declive de uma reta deste tipo é zero (podendo exemplificar, considerando dois pontos desta reta). Ainda nesta discussão, a professora deve traçar (no referencial da questão 12 que estará projetado) a reta de equação x=5, questionando os alunos: *"Qual é a equação desta reta?".*

Para finalizar este segmento, a professora deve questionar: "*Qual é a equação reduzida de uma reta?",* com o objetivo de que os alunos se recordem da expressão $y = ax + b$. Com o objetivo de recordar a representação gráfica de uma função constante, linear ou afim, a professora deve pedir aos alunos exemplos de funções deste tipo, ao pedir por exemplo "*Indiquem a equação de uma reta que possa ser gráfico de uma função afim, e que tenha declive negativo.".*

Neste momento, a colega de estágio irá registar os alunos que realizaram a tarefa proposta para casa.

4.º - Trabalho autónomo na resolução das questões do manual escolar | 7 minutos

A professora deve informar os alunos que irão trabalhar a pares e que deverão resolver as questões 10 da página 179, 7 da página 179 e 5 da página 178 do manual escolar, durante 7 minutos. Ficará também a cargo da professora recordar que deverão resolver as questões nas folhas quadriculadas que lhes foram entregues, escrevendo o seu nome e número, e que não podem apagar qualquer registo - lembrando que no final da aula as folhas serão recolhidas. Os alunos serão informados que devem sempre justificar as suas respostas.

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
10	**Estratégias 10, p. 179:** Observar que se a reta AB é vertical, todos os pontos desta reta têm igual abcissa e, como o ponto B tem abcissa 9, essa será também a abcissa do ponto A. Pelo que, a=9, logo, optar pela hipótese (A). **Dificuldades 10:** -Interpretar o enunciado.	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?*

	-Ao associar o valor da abcissa ao -4, por ser a ordenada do ponto A. -Ao não reconhecer que os pontos A e B têm de ter igual abcissa.	**Apoio a prestar 10:** - A reta *AB* é de que tipo? -Como são os pontos de uma reta vertical? Podes dar um exemplo? - Qual é a abcissa do ponto A? E do ponto B?
7	**Estratégias 7, p. 179:** -Observar que as hipóteses (A), (B), e (D) são verdadeiras e que (C) é falsa porque uma função de proporcionalidade direta é uma reta que passa na origem do referencial e que o seu declive resulta da razão entre a ordenada e a abcissa de um dos seus pontos. **Dificuldades 7:** -Ao não reconhecer que retas com o mesmo declive são paralelas. -Ao associar a ordenada na origem ao declive, na hipótese (B). -Ao identificar o declive da função de proporcionalidade direta como zero, uma vez que a sua representação gráfica passa na origem do referencial. - Ao indicar que o declive de uma função constante é a própria constante, na hipótese (D).	**Apoio a prestar 7:** - Podes dar o exemplo de duas retas paralelas? - Na expressão algébrica de uma função, que valor representa a ordenada na origem? - Como se calcula declive de uma função de proporcionalidade direta? - Podes dar o exemplo de uma função constante? Como calcularias o declive dessa reta?
5	**Estratégias 5, p. 178:** Reconhecer que o valor da ordenada na origem é 5, pelo que o ponto em que o gráfico de f interseta o eixo das ordenadas é o (0,5). Finalmente, selecionar a hipótese (B). **Dificuldades 5:** -Em identificar a ordenada na origem como a ordenada do ponto em que a reta cruza o eixo dos yy. -Ao associar o valor 5 à abcissa.	**Apoio a prestar 5:** -Como estás a pensar? -A função f é de que tipo? - Passa na origem do referencial? -Em que valor a reta cruza o eixo das ordenadas?

5.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro das questões do manual escolar| 8 minutos

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Identificar que todos os pontos de uma reta vertical têm a mesma abcissa.
- Reconhecer a equação de uma reta vertical como $x = c$ e que essa reta passa no ponto de coordenadas $(c, 0)$.
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita Matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q10:** A professora irá solicitar a um aluno que apresente oralmente a resposta do par e deve garantir que toda a turma observa que se a reta AB é vertical, todos os pontos desta reta têm igual abcissa, pelo que, deve destacar que, como o ponto B tem abcissa 9, essa será também a abcissa do ponto A. Caso os alunos revelem muitas dificuldades nesta questão a professora deverá apresentar outros exemplos de retas verticais enfatizando o facto de todos os seus pontos terem igual abcissa.

- **Discussão Q7:** Quatro alunos distintos explicarão oralmente para a turma a sua resposta. A professora deve garantir que os alunos clarificam as suas dúvidas e que todos compreendem a argumentação dos colegas. Caso seja necessário a professora deve fazer uma explicação alargada sobre alguma das alíneas. Em especial, a professora deve destacar que retas com o mesmo declive são paralelas, podendo pedir aos alunos exemplos de retas paralelas.

- **Discussão Q5:** Um aluno irá apresentar oralmente a resposta do par, justificando-a. Em grande grupo, a professora deverá frisar que na equação reduzida de uma reta, a ordenada na origem é a ordenada do ponto em que a reta cruza com o eixo dos yy.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na folha quadriculada, fazendo a correção das questões no caderno diário.

6.º Encerramento da aula	| 2 minutos

A professora deverá recolher as folhas quadriculadas e informar que estas serão entregues na aula seguinte. Caso os alunos não concluam em sala de aula todas as questões do manual escolar propostas, estas serão sugeridas como trabalho de casa para a aula seguinte.

Neste segmento final, com o apoio da colega de estágio a professora entregará aos alunos os documentos recolhidos da aula anterior.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 2.9. Planificação 9.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 9.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 128 e 129 | 21 de abril de 2016

Sumário: Resolução de problemas e exercícios: gráficos de funções afins.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Consolidar a representação algébrica e gráfica uma função afim (em sentido lato)
- Interpretar a função afim atendendo a diferentes contextos: resolução de problemas
- Consolidar a noção de declive

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Os conceitos de função, ordenada na origem e declive
- Identificar e representar uma função linear, afim ou constante
- Cálculo analítico do declive
- O paralelismo entre retas
- A reta vertical e a reta horizontal

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de trabalho n.º 4 ▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar ▪ Quadro e marcador	▪ Ficha de trabalho n.º 4 ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folhas quadriculadas ▪ Manual escolar

Metodologia de trabalho:

- Introdução da ficha de trabalho, discussão e sistematização em grande grupo (turma);
- Na resolução da ficha e das questões do manual, trabalho autónomo dos alunos a pares.

Momentos da aula:

Momentos da aula		Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	5 min
2.º	Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 4	2 min
3.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	10 min
4.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 1	10 min
5.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2	10 min
6.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 2	10 min
7.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução das questões 3 e 4	10 min
8.º	Discussão em grande grupo e resolução das questões 3 e 4	10 min
9.º	Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 17 da página 177	10 min

10.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 17	10 min
11.º	Encerramento da aula	3 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças	**| 5 minutos**

Antes do início da aula a professora deverá acautelar o funcionamento do seu computador e do projetor. Neste segmento, a professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário, enquanto contará com a colaboração da colega de estágio para o registo dos alunos que realizaram o trabalho de casa, para a distribuição das fichas recolhidas na aula anterior e da Ficha de Trabalho n.º 4.

2.º - Apresentação da Ficha de Trabalho n.º 4	**| 2 minutos**

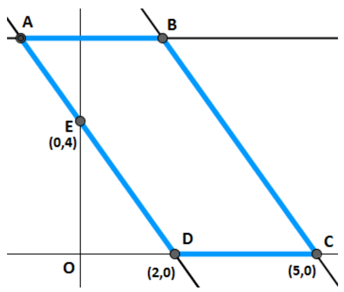
Todos os alunos serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve informar os alunos que irão realizar a primeira questão da ficha de trabalho a pares, durante 10 minutos, que será seguida da discussão em grande grupo.

A professora solicitará a um aluno que leia para a turma a primeira questão da ficha de trabalho, que estará projetada no quadro, questionando se existem dúvidas no que leram, solicitando, nesse caso, a outro aluno que explique a situação proposta para o colega.

3.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 1	**|10 minutos**

A professora circulará pela sala com o objetivo de apoiar os alunos em eventuais dúvidas/dificuldades (privilegiando o questionamento), e de monitorizar o seu trabalho, acautelando possíveis conversas paralelas. Ao interpelar o par de alunos que trabalha em conjunto a professora deverá fomentar a discussão entre estes, evitando validar as suas respostas, e caso se aperceba de uma dúvida generalizada deverá fazer uma breve explicação alargada a toda a turma. A professora deve ainda atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados pelos alunos no quadro.

Os aspetos mencionados estendem-se para os restantes segmentos de trabalho autónomo.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	Tendo em conta o caráter destas questões as estratégias dos alunos poderão ser mais diversificadas do que as aqui apresentadas. **Estratégias 1:** Para um paralelogramo como o seguinte poderão surgir as seguintes estratégias:  -Reconhecer que um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos. Identificar que o lado do paralelogramo	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 1:** - Como é que estás a pensar?

	[AD] tem a reta AD como suporte, que [BC] tem a reta BC como suporte, que [AB] tem a reta AB como suporte e que [DC] tem a reta DC como suporte. Reconhecer que as retas AB e DC são horizontais e do tipo $y = b$, e que, as retas AD e BD são do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero). - Referir que o lado [DC] do paralelogramo está sobre o eixo das abcissas e que o seu comprimento mede 3 unidades, pelo que o seu lado oposto [AB] tem de ser igual e paralelo, independentemente da altura do paralelogramo. - Reconhecer que o ponto E tem coordenadas (0,4) e que a reta suporte de [AD] tem ordenada na origem 4. Calcular o declive desta reta, recorrendo às coordenadas dos pontos E e D, pela expressão $a = \frac{4-0}{0-2} = -\frac{4}{2}$, obtendo neste caso $a = -2$. Assim, uma equação da reta AD é $y = -2x + 4$. Reconhecer que a reta BC é paralela à reta AD e que intersetará o eixo dos yy num ponto P de coordenadas (0,y_P) e, portanto, uma equação pode ser $y = -2x + y_P$. Como a reta BC passa no ponto de coordenadas (5,0), obter que $y_P = 2 \times 5 = 10$. Por fim, escrever uma equação da reta BC como $y = -2x + 10$. Indicar que a reta suporte do lado [DC] tem equação y=0 e concluir que, como as retas são paralelas, a reta suporte do lado oposto à base [ED] será do tipo $y = b$ em que (0,b) é o ponto em que a reta cruza o eixo das ordenadas. Em particular, os alunos poderão atribuir diversos valores a b, nomeadamente, escrever que $y = 6$. - Dar um valor concreto à ordenada dos pontos da equação da reta suporte de [AB], por exemplo, $y = 7$ (e desenvolver estratégias a partir desta opção). - Alguns alunos poderão tentar determinar as coordenadas dos vértices A e B, apesar de esta não uma estratégia muito evidente uma vez que os alunos ainda não trabalharam muito a interseção de duas retas, por processos analíticos. Ainda assim, os alunos poderão, por exemplo, indicar que uma equação da reta AB é y=b e identificar que a interseção com a reta AD é o ponto $(\frac{b-4}{-2}, b)$, por exemplo, no caso de y=6 ser uma equação da reta AB, o ponto A seria (-1,6). Analogamente, o ponto de interseção da reta CB com a reta AB é $(\frac{b-10}{-2}, b)$, ou seja, se b=6, B terá coordenadas (2,6). Para determinar as coordenadas de B a estratégia poderá passar por reconhecer que a medida do comprimento dos segmentos [DC] e [AB] é a mesma e igual a 3 unidades, pelo que, os pontos A e B têm a mesma ordenada e o ponto B terá como abcissa mais três unidades que a abcissa do ponto A. **Dificuldades 1:** - Em identificar as propriedades de um paralelogramo; -Em identificar que retas paralelas têm o mesmo declive; -Ao escrever a equação das retas horizontais. -Em determinar a ordenada na origem da reta BC. - Em iniciar a resolução por considerar que não dispõe de informação suficiente. -Na interpretação do enunciado. -Ao tentar dividir o paralelogramo em outras figuras.	- Que informação consegues retirar do gráfico? - O que pretendes saber? - Recordas-te das características de um paralelogramo? - Sugerir que observe os lados opostos como o objetivo de reconhecer que são iguais e paralelos. - Quais são os vértices do paralelogramo? - Pensa na reta suporte desse lado. Consegues escrever a sua equação? - Que informação tens das coordenadas do ponto E? - Sugerir que reparem que cada lado do paralelogramo está sobre uma reta. - Que característica comum têm os pontos (2,0) e (0,5)? Como serão as coordenadas de todos os pontos dessa reta? - Após conheceres o declive, que informação precisas para escrever a equação da reta.

4.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 1 | 10 minutos

Após dar por concluído o primeiro momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções afins em contextos diversos
- Articular temas matemáticos: álgebra e geometria;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

A professora deve também cuidar que as estratégias dos alunos não são exploradas de forma pormenorizada para não influenciar as estratégias na futura resolução de problemas.

- **Discussão Q1:** Enquanto a figura está projetada, a professora deve solicitar a um par de alunos que apresente oralmente a sua resolução, garantindo que esta explicação é representativa da maior parte das estratégias dos alunos. Depois, ao questionar "*Quem é que pensou de outro modo*?" deverá pedir a outro par para que exponha oralmente a estratégia seguida. Isto, com o objetivo de que toda a turma contacte com diferentes estratégias. A professora deve envolver toda a turma nesta discussão, questionando: *"Concordam com os colegas? E Porquê? Qual a vossa opinião?"*. Na fase inicial a professora não deve induzir nenhuma das respostas, apenas monitorizar toda a discussão, devendo apenas alertar quando algum dos alunos apresenta uma justificação incorreta. A partir das justificações dos alunos, a professora deverá enfatizar as propriedades do paralelogramo como um quadrilátero com lados opostos iguais e paralelos, bem como que dois dos lados deste paralelogramo estão sobre retas paralelas ao eixo das abcissas, frisando ainda (em interação com os alunos) como poderiam obter a ordenada na origem da reta BC. Este será também o momento oportuno para que a professora sublinhe uma aplicação do tema que os alunos estão a estudar na Geometria.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

A professora, à semelhança do segmento de trabalho autónomo anterior, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos

5.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 2 | 10 minutos

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
1	**Estratégias 2.1.a):** -Relacionar o declive positivo com as retas crescentes e como tal concluir que a única reta com declive positivo é a reta r - Efetuar o cálculo analítico do declive e concluir que a única reta com declive positivo é a r. **Dificuldades 2.1.a):** Como nesta questão os alunos deverão responder sem efetuar cálculos, o mesmo poderá ser um entrave na resolução da mesma. Como tal, são esperadas algumas dificuldades. - Recorrer ao cálculo analítico do declive para verificar em que retas o declive é positivo	Ao circular pela sala a professora deve acautelar que os alunos não se dispersam do objetivo da tarefa, solicitando, se necessário, que releiam o enunciado, ou questionando, *o que achas que é para fazer?* **Apoio a prestar 2.1.a):** -Como é que estás a pensar? - O que é pretendido nesta questão? - Como é que valor do declive está relacionado com a reta?

	- Não relacionar a inclinação das retas com o respetivo valor do declive - Confundir o valor do declive com o valor da ordenada na origem **Estratégias 2.1.b):** Análogas às da questão 2.1.a) Concluindo que são as retas p, q e s. **Dificuldades 2.1.b):** Análogas às da questão 2.1.a) **Estratégias 2.1.c):** -Análogas à da questão 2.1.a) - Exclusão de partes - Por ser a única reta horizontal, e distinta das restantes. **Dificuldades 2.1.c):** Análogas à da questão 2.1.a) **Estratégias 2.2:** -A hipótese (A) é uma reta que passa pela origem do referencial, como tal terá que ser a reta p - As hipóteses (B) e a (E) têm declive negativo como tal terão de ser as retas q e s. Os alunos poderão verificar que a ordenada na origem da reta s é inferior à ordenada na origem da reta q, concluindo desta forma que a hipótese (B) é a reta s e a hipótese (E) é a reta q. Ou, os alunos poderão indicar que a reta s está menos inclinada que a reta s e portanto o declive terá que ser inferior, concluindo desta forma que a hipótese (B) é a reta s e a hipótese (E) é a reta q. - A hipótese (D) é a única que tem declive positivo e, portanto, é a reta r - A hipótese (D) é a única que tem declive nulo e, portanto, é a reta t - Os alunos ainda poderão recorrer à questão 2.1. para verificarem quais das retas têm declive positivo, negativo ou nulo. **Dificuldades 2.2:** Devido ao caracter mais aberto desta questão por não ser suposto recorrerem a cálculos analíticos, os alunos poderão demonstrar algumas dificuldades. - Não relacionar o valor do declive com a inclinação das retas - Não relacionar que uma reta que passa na origem do referencial é do tipo $y = ax$ - Não relacionar que uma reta horizontal é do tipo $y = b$ - Trocar a hipótese (B) com a (E) devido ao declive ser negativo - Não apresentar justificação.	- O que significa ter valor positivo? - O que distingue as retas apresentadas na figura? **Apoio a prestar 2.1.b):** Análogo ao da questão 2.1.a) **Apoio a prestar 2.1.c):** Análogas à da questão 2.1. **Apoio a prestar 2.2:** -Como é que estás a pensar? - O que é pretendido nesta questão? - Será que a questão 2.1. nos ajuda a resolver esta? - Quais as diferenças entre as equações reduzidas das retas apresentadas? - Não existe nenhuma hipótese que consigas logo associar a uma reta?

6.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 2 | 10 minutos

Após dar por concluído o segundo momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Relacionar o declive da reta com a sua inclinação;
- Relacionar a representação gráfica com a respetiva equação reduzida da reta;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

Discussão Q2.1: A professora deve solicitar a três alunos (representativos de três pares) que respondam oralmente, cada um a uma alínea diferente. Deve também pedir a todos que justifiquem as suas respostas. A professora deve enfatizar a relação entre o valor do declive e a posição das retas, esclarecendo que retas com declive positivo são crescentes, retas com declive negativo são decrescentes, e que, retas com declive nulo são sempre retas paralelas ao eixo das abcissas.

Discussão Q2.2: A professora deve solicitar a cinco alunos (representativos de cinco pares) que respondam oralmente, cada um a uma equação diferente. Cada aluno deve associar a equação à respetiva reta, explicando como procedeu para fazer essa escolha. Nas equações (B) e (E) a professora deve garantir que os alunos percebem a diferença entre as duas equações, enfatizando o valor do declive, mas também o valor da ordenada na origem. Podendo questionar os alunos: *Qual a diferença na representação gráfica se uma reta tem declive* $-\frac{1}{2}$ *e outra -1? Qual o maior valor? Como conseguimos comparar as duas inclinações?* Nesta discussão é crucial que fique explicito para os alunos a relação entre o declive a inclinação das retas.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

7.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução das questões 3 e 4 | 10 minutos

A professora, à semelhança dos segmentos de trabalho autónomo anteriores, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
3	**Estratégias 3:** -Reconhecer que uma reta paralela à reta AB tem o mesmo declive. Calcular o declive da reta AB tal que $a=\frac{-7-5}{8-2}=-\frac{12}{6}=-2$, e indicar que a reta será do tipo $y=-2x+b$. Reconhecer que resta determinar a ordenada na origem e, como a reta terá de passar no ponto P, indicar que se verificará a igualdade $9=-2\times(-3)+b$. Pelo que b=3. Escrever uma equação da reta paralela a AB que passa pelo ponto P como $y=-2x+3$. **Dificuldades 3:** -Na interpretação do enunciado. - Calcular o declive da reta AP ou BP. -No cálculo do declive. -Em determinar a ordenada na origem da reta paralela a AB que passa no ponto P.	**Apoio a prestar 3:** -Como é que estás a pensar? - Se as retas são paralelas, que informação temos sobre o declive? - Queres escrever a equação de que reta? -De que dados precisamos para escrever uma equação da reta? -Como poderás determinar o declive? E a ordenada na origem?
	Estratégias 4: -Identificar que o eixo de reflexão que transforma a figura A na figura B é uma reta que não passa na origem do referencial, pelo que, é da forma $y=ax+b$ com a e b diferentes de zero. Atendendo à escala do referencial, identificar dois pontos, por exemplo, (4,0) e (2,2) e calcular o declive, tal que, $a=\frac{2-0}{2-4}=$	**Apoio a prestar 4:** -Como é que estás a pensar?

4	$\frac{2}{-2}=-1$. Assim, escrever uma equação do eixo de reflexão como $y=-x+b$ e recorrer a um ponto para determinar b. Por exemplo, recorrendo ao ponto (2,2), obter que $2=-2+b$, logo b=4 e uma equação do eixo seria $y=-x+4$. -Atendendo à escala do referencial, identificar dois pontos, por exemplo, (4,0) e (2,2) e calcular o declive, tal que, $a=\frac{2-0}{2-4}=\frac{2}{-2}=-1$. Assim, escrever uma equação do eixo de reflexão como $y=-x+b$ e recorrer a um ponto para determinar b. Por exemplo, recorrendo ao ponto (2,2), obter que $2=-2+b$, logo $b=4$ e uma equação do eixo seria $y=-x+4$. - Em alternativa, identificar dois pontos, incluindo o ponto de interseção do eixo com a ordenada na origem, por exemplo (4,0) e (0,4). Do mesmo modo, obter que o declive é -1 e escrever $y=-x+4$. **Dificuldades 4:** - Em identificar o eixo de simetria. - Em identificar pontos que pertençam ao eixo de simetria. - Ao associar o eixo de simetria a uma equação de uma reta que não passa na origem do referencial. -No cálculo do declive.	- Como transformamos a figura A na figura B? -Recordar que os vértices correspondentes têm de ficar à mesma distância do eixo de simetria. -Sugerir que trace o eixo de simetria. - De que dados precisamos para escrever uma equação da reta? - Conheces dois pontos do eixo? -Como poderás determinar o declive? E a ordenada na origem?

7.º - Discussão em grande grupo e resolução das questões 3 e 4 | 10 minutos

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções afins em contextos diversos
- Articular temas matemáticos: álgebra e geometria;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q3:** A professora deve solicitar a um aluno que explique a resposta do par, oralmente, para a turma. Caso surjam dúvidas generalizadas a professora deve fazer uma breve explicação e, em interação com os alunos, deverá enfatizar que duas retas paralelas têm o mesmo declive, pelo que, ao calcular o declive da reta AB, determinamos o declive de qualquer reta que seja paralela a AB. Para além disto, a professora deverá enfatizar que uma equação da reta que pretendemos será do tipo $y=-2x+b$ (em que b é a ordenada do ponto em que a reta cruza o eixo das ordenadas) mas que, como não conhecemos esse ponto temos de recorrer aos dados disponíveis, neste caso as coordenadas do ponto P. Como P é um ponto da reta, ao substituirmos as suas coordenadas na equação iremos obter uma igualdade válida e, portanto, de $9=-2\times(-3)+b$ obtemos que b é 3 e uma equação da reta em causa será $y=-2x+3$.
- **Discussão Q4:** Enquanto a figura está projetada, a professora deve solicitar a um aluno que apresente no quadro os resultados do par, explicando como pensaram. Com o objetivo de envolver a turma e clarificar eventuais dúvidas, a professora questionará se alguém pensou de outro modo, pedindo, nesse caso, ao aluno que exponha oralmente a estratégia do par. Nesta discussão deve ficar claro para os alunos que o eixo de reflexão é uma reta que, neste caso, não passa na origem do referencial, pelo que, terá uma equação do tipo $y=ax+b$ (com a e b diferentes de zero). Assim, a professora deverá frisar que todos os pontos da figura A (em particular os vértices) estão à mesma distância do eixo de reflexão que os pontos

correspondentes da figura B e que, com esta informação conseguem identificar pontos que pertencem a este eixo, logo, determinar uma equação do eixo de reflexão.

9.º - Trabalho autónomo dos alunos na resolução da questão 17 da página 177| 10 minutos

A professora, à semelhança dos segmentos de trabalho autónomo anteriores, circulará pela sala com o objetivo de apoiar e monitorizar o trabalho dos alunos e deverá atender às resoluções dos alunos de forma a selecionar as que integrarão a apresentação dos resultados, pelos alunos no quadro.

Os alunos serão informados que irão trabalhar a pares e que deverão resolver as questões na folha quadriculada que foi distribuída, e que não podem apagar qualquer registo, devendo riscar, caso se enganem.

Q	Atividade do aluno	Atividade da professora
17	**Estratégias 17.a):** - Como saem do tanque 10 litros de água por cada minuto ao fim de x minutos saem $10x$ litros de água. O tanque inicialmente tinha 500 litros de água, sendo assim ao fim de x minutos restam no tanque $y = 500 - 10x$ litros de água **Dificuldades 17.a):** Devido ao nível de dificuldade desta questão são esperadas algumas dificuldades. Nomeadamente, - Considerar que saem 10 litros de água por minuto e ao fim de x minutos saem $10x$ litros de água e portanto $y = 10x$ - Não considerar o valor do declive negativo, colocando $500 + 10x$ - Não considerar que por minutos saem 10 litros de água, concluindo que $y = 500 - x$ litros - Não responder **Estratégias 17.b):** - Utilizar os dados iniciais, concluindo que ao fim de 5 minutos saem 50 litros de água. Como tal restam 500-50=450 litros de água - Utilizar a equação obtida na alínea anterior e substituir o x por 5. Obtendo $y = 450$. **Dificuldades 17.b):** Não são esperadas grandes dificuldades nesta questão. - Indicar apenas que saem 50 litros de água. **Estratégias 17.c):** Recorrer à equação obtida na questão 17.a) e substituir o x por diversos valores. Por exemplo, (0, 500), (10, 400). **Dificuldades 17.c):** Não são esperadas muitas dificuldades nesta questão. - Não compreender o que é pedido. - Não saber que valores atribuir a x - Considerar valores de x negativos ou superiores a 50. **Estratégias 17.d):** Construir um referencial e utilizar dois pontos obtidos na alínea anterior. **Dificuldades 17.d):** - Trocar o valor de x com o valor de y. - Não utilizar uma escala correta. - Considerar valores negativos ou superiores a 50.	**Apoio a prestar 17.a):** -Como é que estás a pensar? - O que é pretendido nesta questão? - Quantos litros de água saem do tanque por minuto? - Quantos litros tinha o tanque inicialmente? **Apoio a prestar 17.b):** - O que é pretendido? - Quantos litros saíram do tanque? Nesse caso, quantos litros restam no tanque? **Apoio a prestar 17.c):** - O que é pretendido? - O que representa o x? - Que valores de x podemos ter? - Tendo o objeto como calculamos a sua imagem? **Apoio a prestar 17.d):** -Como é que estás a pensar? - Como construímos um gráfico? - Para traçar um segmento de reta quantos ponto precisamos de saber? - Que dados podemos retirar do que calculamos na alínea anterior?

	Estratégias 17.e): - Por observação da representação gráfica concluir que são necessários 50 minutos. - Utilizar a equação obtida na questão 17.a) e igualar a mesma a 0, concluindo que são necessários 50 minutos. **Dificuldades 17.e):** - Não compreender o que é pedido. - Construir incorretamente o gráfico na alínea anterior e fazer uma leitura incorreta do mesmo	**Apoio a prestar 17.d):** -Como é que estás a pensar? - Se o tanque está vazio, quantos litros de água tem? O que isso significa graficamente? E analiticamente? - O que representa o x?

10.º - Discussão em grande grupo e resolução no quadro da questão 17 | 10 minutos

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, a professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar a função afim em diferentes contextos;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q17.a):** A professora deve solicitar a um aluno que dê a sua resposta no quadro, explicando a obtenção da expressão. A professora deve questionar se toda a turma obteve a mesma expressão, clarificando eventuais dúvidas que persistam. Se as dúvidas forem generalizadas, a professora deve dar vários dados concretos, como por exemplo, quando a torneira está um minuto aberta, dois minutos, 10 minutos para os alunos perceberam a variação, e que esses valores terão sempre de ser multiplicados por 10.
- **Discussão Q17.b):** A professora deve solicitar a um aluno (representativo do par) que responda oralmente, justificando a sua resposta, preferencialmente um aluno que tenha a sua resposta correta. A professora deve questionar se todos os alunos chegaram à mesma resposta.

Discussão Q17.c): A professora deve solicitar a vários alunos que indiquem alguns valores, pedindo que indiquem primeiro o valor de x que escolheram e que cálculos efetuaram para descobrir o valor de y. Ao solicitar a vários alunos a resposta, o objetivo é envolver toda a turma na discussão desta questão.

Discussão Q17.d): A professora deve retroprojetar um referencial e solicitar a um aluno (representativo do par) que se dirija ao quadro e represente no referencial a representação gráfica, justificando a sua escolha de pontos. A professora deve garantir que a turma fica esclarecida com a marcação dos pontos e a razão pela qual se marca um segmento de reta (contido no primeiro quadrante do referencial), enfatizando a contextualização.

Discussão Q17.e): A professora deve solicitar a dois alunos (representativos de dois pares) que respondam oralmente, justificando a sua resposta, preferencialmente um aluno que tenha a sua resposta correta e outro com a resposta incorreta. com o intuito de promover a discussão e envolver toda a turma. A professora deve garantir que todos os alunos percebem graficamente o que significa o tanque estar vazio, assim como analiticamente.

No caso de surgir alguma outra questão inesperada e interessante para ser discutida em grande grupo, a professora solicitará ao aluno que explique o seu raciocínio para a turma. Em especial, a professora deverá insistir de forma continuada para que os alunos não apaguem o que escreveram na ficha de trabalho, fazendo a correção das questões no caderno diário.

10.º Encerramento da aula | 3 minutos

A professora deverá recolher a Ficha de Trabalho n.º 4 e as folhas quadriculadas e informar que estas serão devolvidas no dia seguinte, no final de uma das aulas dos alunos.

Será feita uma proposta preparação para o teste, que os alunos devem registar no caderno:

- do manual escolar: página 176, questões 9, 10 e 11; página 177, questão 15; página 179, questão 6; página 181, questões 4 e 5;

-do Caderno de Atividades: Ficha 21, questões 2 e 3; Ficha 22; Ficha 23, questões 3 e 4.

Os alunos serão informados que a aula seguinte será de esclarecimento de dúvidas para o teste.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback*, serão recolhidas as produções escritas dos alunos, bem como serão anotados na grelha da turma as participações e trabalhos de casa.

Anexo 2.10. Planificação 10.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 10.ª Aula

8.º ano Turma [redacted]

Lições 130 — 27 de abril de 2016

Sumário: Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação.

Duração da aula: 45 minutos

Objetivos:
- Consolidar os conteúdos da temática "Gráficos de Funções Afins"
- Esclarecer dúvidas para a ficha de avaliação

Conhecimentos prévios dos alunos:
- Dízimas finitas e infinitas periódicas
- Equações do 2º grau
- Os conceitos de função, ordenada na origem e declive
- Identificar e representar uma função linear, afim ou constante
- Cálculo analítico do declive
- O paralelismo entre retas
- A reta vertical e a reta horizontal

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Computador e projetor ▪ Manual escolar e Caderno de Atividades ▪ Quadro e marcador ▪ Ficha de trabalho nº4	▪ Material de desenho e escrita ▪ Manual escolar e Caderno de Atividades ▪ Ficha de trabalho nº4

Metodologia de trabalho:
- Esclarecimento de dúvidas e discussão em grande grupo (turma).

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 45 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças.	4 min
2.º	Discussão em grande grupo e resolução da questão 4 da ficha de trabalho nº4	10 min
2.º	Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação	30 min
3.º	Encerramento da aula	1 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula. Ditado do sumário e registo das presenças	**| 4 minutos**

A professora fará o registo de presenças dos alunos e ditará o sumário.

2.º - Discussão em grande grupo e resolução da questão 4 da ficha de trabalho nº4 |10minutos

Uma vez que na aula anterior não foi possível discutir os resultados da questão 4 da ficha de trabalho nº4 a professora irá iniciar a aula com este segmento.

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Interpretar funções afins em contextos diversos
- Articular temas matemáticos: álgebra e geometria;
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados, reforçando conhecimentos;
- Promover o espírito crítico;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos. *Todos conseguiram resolver esta questão? Todos concordam? Alguém pensou de outro modo? Alguém tem dúvidas?*

- **Discussão Q4:** Enquanto a figura está projetada, a professora deve solicitar a um aluno que apresente no quadro os resultados do par, explicando como pensaram. Com o objetivo de envolver a turma e clarificar eventuais dúvidas, a professora questionará se alguém pensou de outro modo, pedindo, nesse caso, ao aluno que exponha oralmente a estratégia do par. Nesta discussão deve ficar claro para os alunos que o eixo de reflexão é uma reta que, neste caso, não passa na origem do referencial, pelo que, terá uma equação do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero). Assim, a professora deverá frisar que todos os pontos da figura A (em particular os vértices) estão à mesma distância do eixo de reflexão que os pontos correspondentes da figura B e que, com esta informação conseguem identificar pontos que pertencem a este eixo, logo, determinar uma equação do eixo de reflexão.

3.º - Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação |30 minutos

Os alunos serão informados pela professora do modo de organização da aula bem como do seu modo de trabalho. A professora deve indicar que a aula será desenvolvida em torno do esclarecimento das eventuais dúvidas dos alunos para a ficha de avaliação.

A professora deve ter em atenção os objetivos que pretende alcançar com este segmento:

- Esclarecer dúvidas para a ficha de avaliação
- Levar o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados ao longo do ano letivo, reforçando conhecimentos;
- Promover a comunicação, o raciocínio e a escrita matemática.

Ao questionar os alunos, a professora deve atender às dúvidas mais generalizadas sobre as temáticas trabalhadas e, caso se mostre necessário, deverá fazer uma breve explicação alargada à turma sobre algum dos tópicos trabalhados em sala de aula. A professora deverá dirigir estes momentos de discussão, tentando sempre envolver os alunos.

Caso os alunos não pretendam esclarecer dúvidas, devem trabalhar nas propostas sugeridas na aula anterior, como preparação para a ficha de avaliação.

Atendendo aos diferentes ritmos de trabalho dos alunos, para os que já realizaram todas as tarefas propostas a professora deverá sugerir que realizem as questões da ficha global n.º 5 do caderno de atividades, das páginas 83 e 84.

A professora deve circular pela sala, monitorizando o trabalho dos alunos, esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir.

3.º Encerramento da aula | 1 minuto

A professora deverá recordar os alunos que o teste de avaliação sumativa se realiza no dia seguinte e que, para o efeito, deverão levar para a aula: folha de teste, caneta, régua e calculadora.

Formas e momentos de avaliação:

Nesta aula a avaliação reguladora, formativa e sumativa, seguirá os moldes das anteriores. Para esse efeito será privilegiado o *feedback* e serão anotadas as participações dos alunos na grelha da turma.

Anexo 2.11. Planificação 11.ª aula

Plano de Aula de Matemática - 11.ª Aula

8.º ano Turma

Lições 131 e 132 28 de abril de 2016

Sumário: Realização da ficha de avaliação sumativa.

Duração da aula: 90 minutos

Objetivos:

- Consolidar os conteúdos abordados ao longo do ano letivo, nomeadamente, do tema "Gráficos de Funções Afins", "Dízimas finitas e infinitas periódicas" e "Equações do 2º grau"
- Esclarecer dúvidas para a ficha de avaliação

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Tópicos do tema "Gráficos de Funções Afins", "Dízimas finitas e infinitas periódicas" e "Equações do 2º grau"

Recursos para o professor:	Recursos para o aluno:
▪ Ficha de avaliação sumativa	▪ Ficha de avaliação sumativa ▪ Material de desenho e escrita ▪ Folha de teste ▪ Calculadora

Metodologia de trabalho:

- Trabalho autónomo dos alunos na realização da ficha de avaliação sumativa.

Momentos da aula:

	Momentos da aula	Tempo previsto (em 90 minutos)
1.º	Entrada na sala de aula e registo das presenças.	4 min
2.º	Trabalho autónomo na realização da ficha de avaliação sumativa	85 min
3.º	Encerramento da aula	1 min

Desenvolvimento da aula:

1.º - Entrada na sala de aula e registo das presenças | 4 minutos

A professora fará o registo de presenças dos alunos e distribuirá o enunciado da ficha de avaliação sumativa.

2.º - Trabalho autónomo na realização da ficha de avaliação sumativa |85 minutos

Os alunos trabalharão autonomamente na ficha de avaliação sumativa.

A professora deve circular pela sala, monitorizando o trabalho dos alunos.

3.º Encerramento da aula	| 1 minuto

A professora deverá recolher as fichas de avaliação sumativa que os alunos realizaram.

Formas e momentos de avaliação:

A realização desta ficha de trabalho será um elemento integrante da avaliação sumativa dos alunos.

Anexo 3 – Fichas de Avaliação

Anexo 3.1. Ficha de Avaliação Abril 2016

	7.º Teste de Avaliação de Matemática – 8.º Ano **abril 2016** **Classificação: ____________________________ por cento (____ %)** **Aluno:______________________________ N.º: _____ Turma:**
Professora: _____________	**EE: _______________________________________**

Sugestão para ultrapassar as dificuldades manifestadas:

□ Estar mais atento/concentrado nas aulas.

□ Realizar com mais empenho as tarefas propostas.

□ Realizar mais vezes os trabalhos de casa.

□ Exprimir as dúvidas e dificuldades na sala de aula. Versão 1

Lê atentamente todas as questões. Justifica sempre que necessário todas as respostas. Apresenta todos os cálculos que efetuar. Nas questões de escolha múltipla escolhe apenas uma das opções apresentadas, se escolheres mais do que uma opção a questão será anulada.

Não podes usar corretor.

1. Considera os números $\frac{4}{35}$ e $\frac{9}{20}$.

1.1. Qual dos números admite uma representação em dizima finita? Justifica a tua resposta.

1.2. Escreve a fração decimal que corresponde ao número indicado na alínea anterior.

2. Efetua a decomposição decimal do número racional 23,217 .

3. Representa na reta numérica o número racional **1,1(6)** começando por representá-lo na forma de **fração** e em seguida como **numeral misto**.

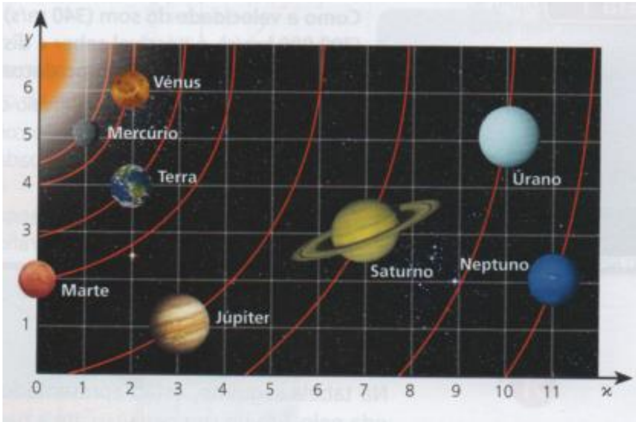
4. Resolve as seguintes equações:

4.1. $2x^2 - 72 = 0$

4.2. $3x^2 + 4 = x^2 + 4$

4.3. $x^2 - 9x = 0$

5. Na figura estão representados os planetas do sistema solar. (A figura não está à escala).



5.1. Indica as coordenadas do centro dos planetas Mercúrio e Saturno.
5.2. Qual é a abcissa do centro de Júpiter?
5.3. Qual é a ordenada do centro de Úrano?
5.4. Como se designa o ponto de coordenadas (0,0)?

6. Considera as seguintes retas dadas pelas respetivas equações:

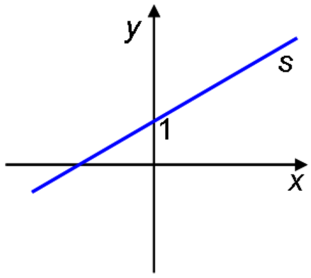
reta r : $y = 2x + 5$; reta s : $y = -2x + 7$;
reta t : $y = 2x + 3$; reta v : $y = -2x + 1$

Duas retas paralelas são, por exemplo:

(A) r e s **(B)** r e v

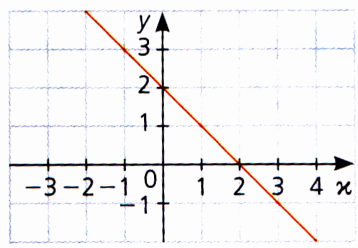
(C) r e t **(D)** t e s

7. Na figura está representada uma reta **s** , gráfico da função **f** , com declive $\frac{1}{3}$ e que interseta o eixo ***Oy*** no ponto de coordenadas $(0\ ,\ 1)$.
Indica uma expressão algébrica para a função **f** .



8. Determina o declive da reta ***EF*** sabendo que, num determinado referencial ortogonal e monométrico, se tem:
8.1. $E(2\ ,\ 5)$ e $F(4\ ,\ 5)$
8.2. $E(2\ ,\ 5)$ e $F(\ 7\ ,\ -3)$

9. Qual é a expressão algébrica da função representada graficamente no referencial cartesiano?

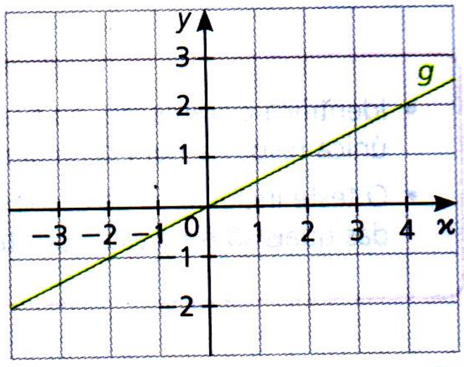


(A) $y = -x + 2$ **(B)** $y = 2x + 2$

(C) $y = -x - 2$ **(D)** $y = 2x - 1$

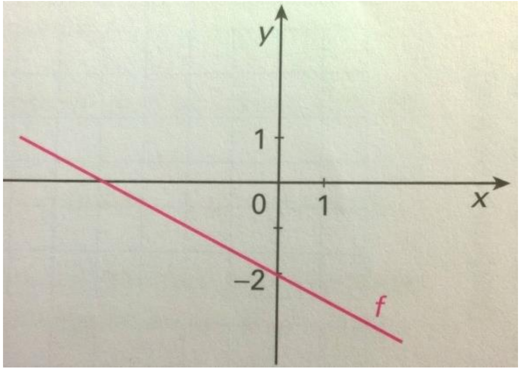
10. Considere duas funções ***f*** e ***g***. Em baixo, encontram-se a expressão algébrica de f e, ao lado, uma representação gráfica de ***g***.

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+5$$



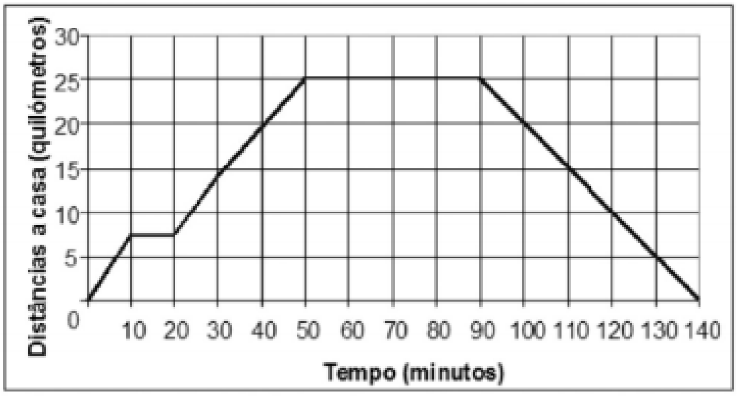
10.1. Qual é o declive da reta que representa a função ***g***?
10.2. Escreve a expressão algébrica da função ***g***.
10.3. As retas que representam as funções ***f*** e ***g*** são concorrentes ou paralelas? Justifica a tua resposta.

11. Na Figura pode observar-se a reta que representa graficamente a função ***f***. Sabe-se que $f(x)=-\frac{1}{2}x+b$



11.1. Escreve a expressão algébrica que define a função ***f***.
11.2. Escreve a equação de uma reta paralela à reta da função ***f*** , cuja ordenada na origem seja um número inteiro positivo.

12. No sábado, o Luís combinou encontrar-se com uns amigos no Pavilhão da escola, para verem um jogo de andebol. Saiu de casa, de moto, às 10horas e 30 minutos. Teve um furo, arranjou o pneu rapidamente e, depois, reuniu-se com os amigos. O gráfico representa as distâncias a que o Luís esteve da sua casa, em função do tempo, desde que saiu de casa até ao seu regresso.



Atendendo ao gráfico, responde às questões, apresentando todos os cálculos que efetuares.

12.1. Quanto tempo levou o Luís a arranjar o furo?

12.2. A que horas encontrou os amigos?

12.3. A que horas chegou a casa?

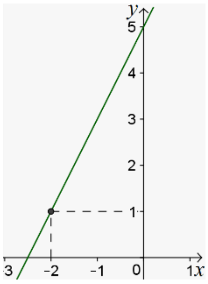
12.4. O jogo de andebol tinha dois períodos, com a duração de 20 minutos cada, e um intervalo de 5 minutos entre os dois períodos. Explica como podes concluir, pela análise do gráfico, que o Luís não assistiu ao jogo todo.

12.5. Seja ***g*** a função que representada pelo gráfico, determina ***g***(90) e explica o significado no contexto da situação.

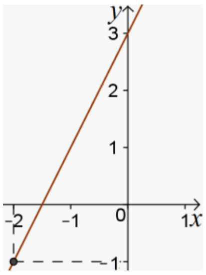
12.6. A que distância de casa se encontrava o Luís 2 horas e 10 minutos após ter saído de casa? Explica como chegaste à tua resposta

13. **Qual das retas** representadas nos gráficos seguintes **passa pelo ponto de coordenadas (-2, 1)** e tem **ordenada na origem 3**?

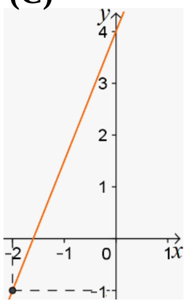
(A)



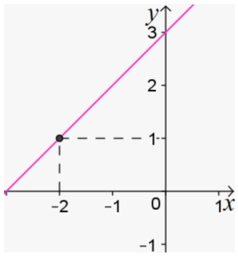
(B)



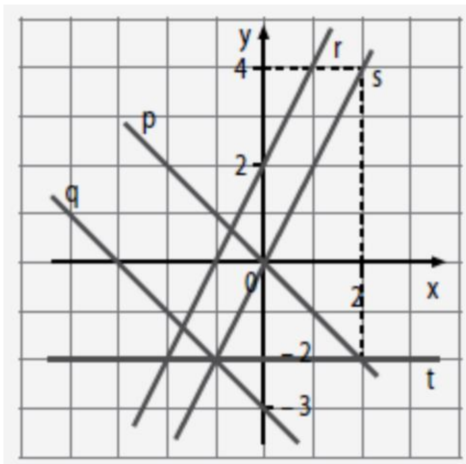
(C)



(D)



14. Observa o referencial ao lado.



14.1. Associa a cada uma das funções representadas abaixo **a letra que designa a reta** que lhe corresponde:

(1) $y = 2x$: ____ (2) $\cancel{y = x}$: ____ (3) $y = -2$: ____

(4) $y = 2x + 2$: _____ (5) $y = -x - 3$: _____

14.2. Indica:

a) as funções **afins**;

b) as funções **lineares**;

c) o **declive e a ordenada na origem** da função $y = 2x + 2$.

d) duas funções com o **mesmo declive**.

15. O Sr. António é eletricista e ganha 6 euros por cada hora de trabalho.
A tabela ao lado representa a relação entre o número de horas de trabalho e a respetiva remuneração ao longo de um dia.

Tempo (horas)	2		5		10
Remuneração (€)		48		36	

15.1. Completa a tabela.
15.2. Qual é a variável dependente? E a independente?
15.3. A remuneração que o António recebe é diretamente proporcional ao tempo de trabalho? Justifica a tua resposta.
15.4. Escreve uma expressão algébrica da função *r* que relaciona o tempo *t*, em horas, com a remuneração, em euros, do António.
15.5. Quanto recebe o António se trabalhar 12 horas?
15.6. Num certo dia, o Sr. António recebeu 90 euros. Quantas horas trabalhou o Sr. António?

Anexo 4 – Autorizações

Anexo 4.1. Pedido de Autorização à Direção

Pedido de Autorização

Exmo. Sr.

Diretor do Agrupamento de Escolas de Caneças

Eu, Inês Isabel Canário Teixeira, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, solicitar autorização para realizar um Projeto de Investigação em Educação com a turma do 8.º [redacted]. Este trabalho de cariz investigativo, intitulado "Noção de Declive nas Funções Afim, linear e constante", integra-se no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

O referido projeto terá por base a lecionação da subunidade "Gráficos de funções afins" do programa da disciplina de Matemática, no início do 3.º período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos. O estudo tem como principal objetivo compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de noção de declive nos vários tipos de função e nas suas diferentes representações.

Para a concretização deste trabalho de cariz investigativo será fundamental a recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e; a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, com a informação sobre esta investigação, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Caneças, 24 de fevereiro de 2016

Pede deferimento,

____

(Inês Teixeira)

Anexo 4.2. Comunicação ao Diretor de turma

Comunicado

Exma. Sra.
Diretor de Turma do 8.º [redacted]

Eu, Inês Isabel Canário Teixeira, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, comunicar que a turma do 8.º [redacted] irá participar num estudo, no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", durante o 3.º período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos. Este estudo, autorizado pela Direção da Escola a 24 de fevereiro de 2016, integra-se no meu trabalho final do Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais comunico que, a Coordenação do Departamento de Matemática, os alunos e os Encarregados de Educação serão também informados do objetivo e parâmetros deste estudo. Saliento ainda que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 8.º ano.

A concretização deste trabalho de cariz investigativo implicará uma recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

Caneças, 25 de fevereiro de 2016

____
(Inês Teixeira)

Tomei conhecimento,

____
(O Diretor de Turma do 8.º [redacted])

Anexo 4.3. Comunicação à Coordenadora do Departamento de Matemática

Comunicado

Exma. Sra.

Coordenadora do Departamento de Matemática

Eu, Inês Isabel Canário Teixeira, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho, por este meio, comunicar que a turma do 8.º F irá participar num estudo, no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", durante o 3.º período escolar, ao longo de 18 tempos de 45 minutos. Este estudo, intitulado "Noção de Declive nas Funções Afim, linear e constante", visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de noção de declive nos vários tipos de função e nas suas diferentes representações. O referido estudo, autorizado pela Direção da Escola a 24 de fevereiro de 2016, integra-se no Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais comunico que, a Diretora de Turma do 8.º [redacted], os alunos e os Encarregados de Educação serão também informados do objetivo e parâmetros deste estudo. Saliento ainda que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 8.º ano.

A concretização deste trabalho implicará uma recolha de dados, como: os documentos produzidos pelos alunos durante as atividades em aula; a transcrição de algumas das interações entre alunos, em sala de aula; a transcrição de entrevistas que possam vir a ser realizadas aos alunos, fora do contexto sala de aula e; a eventual videogravação de aulas que se destina a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não sendo divulgada por nenhuma forma a terceiros. Deste modo, serão endereçados pedidos de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma, garantindo que será salvaguardado o anonimato dos alunos participantes.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

Caneças, 25 de fevereiro de 2016

____

(Inês Teixeira)

Tomei conhecimento,

____

(A Coordenadora do Departamento de Matemática)

Anexo 4.4. Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr.

Encarregado de Educação do(a) aluno(a) da turma do 8.º[redacted]

Eu, Inês Isabel Canário Teixeira, mestranda em Ensino da Matemática, e estagiária na Escola Secundária de Caneças, sob a orientação da Professora de Matemática Anabela Candeias, venho por este meio comunicar que a turma do 8.º [redacted] irá participar num estudo, ao longo das primeiras 11 aulas do 3.º período escolar, no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins". Este estudo, intitulado "Noção de declive nas funções Afim, linear e constante", visa compreender de que forma os alunos se apropriam do compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de noção de declive nos vários tipos de função e nas suas diferentes representações. O referido estudo, autorizado pela Direção da Escola, integra-se no Mestrado em Ensino de Matemática, que estou a realizar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mais se esclarece que a participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, podendo sim, constituir uma motivação suplementar para a aprendizagem deste tema, que faz parte do Programa de Matemática do 8.º ano. Para a sua concretização será essencial a participação voluntária dos alunos, bem como, o consentimento dos respetivos Encarregados de Educação (preenchendo e assinando a ficha anexa, a entregar à Professora de Matemática da turma).

Para a realização deste trabalho será imprescindível a recolha de documentos produzidos pelos alunos em sala de aula (como fichas de trabalho e tarefas), da transcrição de algumas audiogravações, em contexto de sala de aula, e da transcrição de eventuais entrevistas aos alunos, as quais poderão decorrer, pontualmente, num horário favorável para os alunos e combinado com os respetivos Encarregados de Educação. As aulas serão também registadas em vídeo, mas as imagens e documentos recolhidos destinam-se unicamente a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não estando sujeitas a qualquer tipo de divulgação posterior, garantindo-se o anonimato quer dos alunos quer da escola.

Desde já agradeço, sinceramente, a colaboração de todos os intervenientes.

25 de fevereiro de 2016

A Mestranda em Ensino da Matemática,

____

(Inês Teixeira)

Autorização

Eu, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ________________________________, n.º ____, da turma 8.º [redacted], tomei conhecimento dos objetivos estudo a realizar no âmbito da unidade de ensino "Gráficos de funções afins" que envolverá a turma, no âmbito da disciplina de Matemática, ao longo do 3.º Período, e ___________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando , com a garantia da sua privacidade e anonimato.

Relativamente à gravação de imagens das aulas, apenas para análise neste estudo, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e anonimato.

Quanto à realização de entrevistas, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e anonimato.

_____ de fevereiro de 2016

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

Anexo 5 – Entrevista

Anexo 5.1. Entrevista: Ficha de Trabalho

Matemática 8.º Ano	Data: _____.maio.2016 Aluno:_______________________________________	N.º: ______ Turma: _____
Ficha de Trabalho N.º		

1. O Sr. Martim usou um cronómetro e mediu a distância percorrida em 10 segundos pela Adriana que se deslocava a pé, pelo Alexandre que ia de automóvel e pela avó da Amélia que ia de autocarro.

1.2. Qual das pessoas percorreu uma maior distância ao fim de 6 segundos?

1.3. A cada linha do gráfico faz corresponder o nome de uma das quatro pessoas referidas acima e explica o teu raciocínio.

1.4. Qual o declive das retas A e C?

1.5. Comenta a seguinte afirmação: "O declive da reta B é inferior ao declive da reta A"

1.6. Qual a relação entre o declive e a distância percorrida?

1.7. No referencial apresentado no enunciado, esboça uma possível representação gráfica para o Rafael, que se deslocava de bicicleta. Explica o teu raciocínio.

2. Considera as seguintes funções afins:
$f(x) = -3x + 1$ $\quad g(x) = 2x \quad h(x) = -3x - 5 \quad i(x) = 5$

2.2. Indica quais destas funções são crescentes? E decrescentes? Explica a tua resposta.

2.3. Qual é a posição relativa das retas que representam as funções f e h? Justifica a tua resposta.

2.4. Escreve a expressão de uma função afim que passe pelos pontos A(5, -1) e B(7, 3).
Existe alguma relação entre a reta que representa esta função e as retas anteriormente representadas?